Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)

19 novembre 2002

1. Considerato l'insieme

$$\Omega := \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x, y \geq 0 \ \text{ e } \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\},$$

calcolare il seguente integrale applicando il teorema di Green

$$\int_{\partial\Omega} -y\,dx \,+\, \ln(x^2+y^2)\,dy \;=\; \int_{\partial\Omega} \big(-y\,,\,\ln(x^2+y^2)\big) \bullet ds.$$

2. Sia C la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione $y \mapsto 2|y|$ attorno all'asse z. Posto

$$T := \big\{(x,y,z) \in C \,\big|\, 1 \leq z \leq 2\big\},$$

calcolare l'integrale

$$\int_T z\,dS.$$

3. Data la funzione

$$f(z) := x^2 - y^2 - x - iy(1-2x), \qquad z = x + iy \in \mathbf{C}$$

affrontare le seguenti questioni.

- Dimostrare che f soddisfa CIP;
- Si scelga una curva C congiungente 0 a $2+i$ e si calcoli quindi $\int_C f(z)dz$;
- Verificare che il Teorema fondamentale del calcolo in $\mathbf{C}$ produce lo stesso risultato a cui si è pervenuti nel punto precedente.

4. Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) := \frac{x^2 - 3y^2 + 8xy}{2 - x^2 - y^2}$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine e quindi determinarne i valori.