NOTE DEL CORSO
ANALISI MATEMATICA IV UNITÀ DIDATTICA (COMPATTA)
A.A. 04/05

SILVANO DELLADIO

Lezione del 21/9/04 (2 ore)

Presentazione generale del corso. Rassegna di "situazioni problematiche" relative al calcolo di:

(1.1) lunghezza di una curva (nel piano o nello spazio);
(1.2) massa di un filo;
(1.3) lavoro compiuto da un campo lungo una curva orientata;
(2.1) area di una superficie;
(2.2) massa di una lamina;
(2.3) flusso di un campo attraverso una supeficie orientata;
(3.1) volume di un sottoinsieme dello spazio;
(3.2) massa di un corpo;
(4.1) area di un sottoinsieme del piano;
(4.2) volume del sottografico di una funzione $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

In tutti i casi elencati il numero da calcolare si approssima mediante somme finite del tipo

$$\sum_i f(P_i)m(E_i) \tag{1}$$

dove $\{E_i\}$ è una partizione "molto fitta" dell'oggetto geometrico coinvolto nella formulazione del problema (una curva per (1.1-3), una superficie per (2.1-3), eccetera), $P_i \in E_i$, f è una funzione opportuna ed m è la misura naturale per gli E_i (lunghezza per 1.1-3, area per 2.1-3, eccetera). In particolare:

- $f \equiv 1$ in (1.1), (2.1), (3.1) e (4.1);
- f è la densità di massa in (1.2), (2.2) e (3.2);
- $f \equiv F \bullet \tau$ in (1.3), dove F è il campo che compie lavoro mentre τ è il campo di vettori unitari tangenti alla curva e orientati come la curva;
- $f \equiv F \bullet \nu$ in (2.3), dove F è il campo di cui calcolare il flusso mentre ν è il campo di vettori unitari ortogonali alla superficie e orientati come la superficie.

Lezione del 22/9/04 (2 ore)

Terminologie alternative: curva come mappa e sua immagine, oppure curva e sua parametrizzazione. Una curva ammette infinite parametrizzazioni. Esempi.

Ogni curva liscia ammette parametrizzazioni non liscie. Inoltre esistono curve non liscie con parametrizzazioni liscie (esempio: $\gamma(t) := (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$).

Esempi di parametrizzazioni di curve (segmento, grafico di funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, elica, ...). Definizioni di curva chiusa, curva aperta, curva semplice.

Proposizione 1. *Sia data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ e sia $t_0 \in [a, b]$. Allora il limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

esiste in $\mathbf{R}^n$ se e solo se le componenti γ_i sono derivabili in t_0. In tal caso si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che si ha

$$\left| \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} - v_i \right| \leq \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} - v_j \right|$$

per ogni $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ e per $i = 1, \dots, n$. □

Definizione 1. *Sia γ come in Proposizione 1. Diremo che γ è derivabile in $t_0 \in [a, b]$ se esiste*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \in \mathbf{R}^2.$$

Tale limite verrà indicato con $\gamma'(t_0)$.

Ora Proposizione 1 può essere riformulata come segue:

Proposizione 2. *Sia data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ e sia $t_0 \in [a, b]$. Allora γ è derivabile in t_0 se e solo se tutte le componenti γ_i sono derivabili in t_0. In tal caso si ha*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

Definizione 2. *Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ è detta regolare a tratti se essa è semplice, continua e se si può trovare una suddivisione*

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

tale che, per ogni j, si abbia

$$\gamma|(a_j, a_{j+1}) \in C^1$$

e

$$\gamma'(t) \neq 0, \qquad t \in (a_j, a_{j+1}).$$

Nel caso in cui le precedenti condizioni possano essere verificate con $N = 1$, si dice che γ è regolare.

Proposizione 3. *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è regolare allora $\gamma([a, b])$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.*

DIMOSTRAZIONE: si veda il corso di Analisi Matematica III (Sisto Baldo).

OSSERVAZIONE: La curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1,1]$, non è regolare in quanto $\gamma'(0) = 0$. Coerentemente a Proposizione 4, il luogo $\gamma([a,b])$ non è localmente grafico di una funzione di classe C^1.

Lezione del 27/9/03 (2 ore)

Proposizione 4. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una curva derivabile in t_0, con $\gamma'(t_0) \neq 0$, e consideriamo la seguente parametrizzazione della retta per $\gamma(t_0)$ avente direzione $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$:*

$$\lambda_v(t) := \gamma(t_0) + (t - t_0)v, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Si ha allora che $\gamma(t) - \lambda_v(t)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $t - t_0$, per $t \to t_0$, se e soltanto se $v = \gamma'(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti

$$\frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v.$$

Ne segue che

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = 0$$

se e soltanto se $v = \gamma'(0)$. □

La precedente proposizione ci mostra che, fra tutte le rette λ_v, ce n'è una che meglio approssima la curva γ vicino a t_0. Essa si ottiene prendendo $v = \gamma'(t_0)$. Risulta pertanto naturale dare la seguente definizione.

Definizione 3. *Nelle ipotesi di Proposizione 4, la retta*

$$t \mapsto \lambda_{\gamma'(t_0)}(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

è detta <u>retta tangente (affine)</u> alla curva γ in $\gamma(t_0)$.

Ulteriore commento al problema (1.2), discusso nella lezione del 21/9/04. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n = 2,3$) parametrizza il luogo C occupato dal filo ed f indica la densità di massa del filo medesimo, allora le somme finite (1) approssimano il numero

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt. \tag{2}$$

Questa espressione diviene pertanto il "naturale candidato per la definizione di $\int_C f$". Prima però essa andrà oppotunamente "testata": più precisamente verificheremo che la formula (2) non dipende dalla scelta della parametrizzazione e che inoltre essa produce una nozione di misura coerente, nei casi elementari (segmento, circonferenza, ...), con quella classica.

Proposizione 5. *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ e $\lambda : [c,d] \to \mathbf{R}^n$ parametrizzazioni regolari tali che*

(i) *$\gamma([a,b]) = \lambda([c,d]) =: C$;*
(ii) *$\|\gamma'\|$ e $\|\lambda'\|$ sono limitate.*

Allora, se $f : C \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_c^d f(\lambda(s))\|\lambda'(s)\|\,ds.$$

DIMOSTRAZIONE: Non è difficile provare che esiste $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ biiettiva, di classe C^1 e tale che $\gamma = \lambda \circ \sigma$.

Richiamando Proposizione 1 si dimostra che vale la formula

$$\gamma' = (\lambda' \circ \sigma)\,\sigma'. \tag{3}$$

Infatti le $\lambda_i \circ \sigma$ sono derivabili e quindi $\lambda \circ \sigma$ è derivabile e si ha

$$(\lambda \circ \sigma)' = ((\lambda_1 \circ \sigma)', (\lambda_2 \circ \sigma)', \dots) = ((\lambda_1' \circ \sigma)\sigma', (\lambda_2' \circ \sigma)\sigma', \dots) = (\lambda' \circ \sigma)\sigma'.$$

Da (3) e ricordando la formula di integrazione per sostituzione, segue ora che

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt &= \int_a^b f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\sigma'(t)\|\,dt\\ &= \int_a^b f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\||\sigma'(t)|\,dt\\ &= \int_c^d f(\lambda(s))\|\lambda'(s)\|\,ds.\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE: La formula (3) estende la formula di derivazione per le funzioni composte dimostrata nei precedenti corsi di analisi. Essa costituisce un risultato standard del calcolo differenziale che ci sarà utile anche in seguito.

OSSERVAZIONE: La proposizione precedente si generalizza immediatamente alle curve regolari a tratti (che ricorreranno molto spesso in seguito).

OSSERVAZIONE: Come anticipato all'inizio della lezione vari test eseguiti su $\int_C 1$ (il segmento, la circonferenza) e le sue proprietà generali (invarianza rispetto ad alcune classi di trasformazioni) confermano l'ipotesi intuitiva che tale quantità costituisca la giusta nozione di misura (lunghezza) della curva C.

A questo punto possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 4. *Una curva C è detta C^1 a tratti se è dotata di una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$. Se inoltre $\|\gamma'\|$ è limitata, diremo che C è C^1 a tratti e adatta all'integrazione. In tal caso, se f è una funzione continua in C si pone*

$$\int_C f := \int_a^b (f \circ \gamma)\,\|\gamma'\|.$$

Per $f \equiv 1$, l'integrale corrispondente verrà detto <u>misura (lunghezza) di C</u> *e indicato con $m_1(C)$, cioè*

$$m_1(C) := \int_C 1.$$

Notazione alternativa: $\int_C f\,ds$, $\int_C f\,d\mathcal{H}^1$.

Proposizione 6. *Se C è dotata di una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, allora*

$$m_1(C) = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dove $\mathcal{P}([a,b])$ denota l'insieme delle partizioni di $[a,b]$

$$\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N), \ \text{con } t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b$$

mentre $l_\gamma(\Delta)$ indica la lunghezza della poligonale avente come vertici le immagini $\gamma(t_j)$ della partizione Δ, cioè

$$l_\gamma(\Delta) := \sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|.$$

DIMOSTRAZIONE: Posto

$$L := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dimostriamo dapprima che

$$L \leq m_1(C). \tag{4}$$

Consideriamo $\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N) \in \mathcal{P}([a,b])$ e, fissato j con $0 \leq j \leq N-1$, definiamo il vettore unitario

$$u := \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, si trova che

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| &= u \bullet (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) = u \bullet \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} u \bullet \gamma'(t)\,dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\|\,dt \end{aligned} \tag{5}$$

e quindi, sommando

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = m_1(C)$$

dalla quale segue subito la disuguaglianza (4).

Per dimostrare il viceversa, assumiamo che γ sia regolare (una volta ottenuto il risultato sotto questa ipotesi, è facile passare al caso generale). Osserviamo che allora γ' è continua e quindi anche uniformemente continua in $[a,b]$. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \leq \varepsilon \tag{6}$$

per ogni $s, t \in [a,b]$ tali che $|t - s| \leq \delta$. Se ora consideriamo una partizione

$$\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N) \in \mathcal{P}([a,b])$$

uniforme e di “passo” minore di δ, cioè

$$t_{j+1} - t_j = \frac{b-a}{N} < \delta, \qquad (j = 0, \dots, N-1)$$

segue che

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt &\leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_j)\| dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t_j)\| dt \\
&\leq \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \|\gamma'(t_j)\|(t_{j+1} - t_j) \\
&\leq \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| (t_{j+1} - t_j) + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|.
\end{aligned}$$

Poiché, come mostreremo fra breve

$$\left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| \leq n\varepsilon \tag{7}$$

si ottiene

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq (n+1)(t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

da cui, sommando

$$m_1(C) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq (n+1)(b-a)\varepsilon + l_\gamma(\Delta) \leq (n+1)(b-a)\varepsilon + L.$$

La disuguaglianza $L \geq m_1(C)$ (e quindi la conclusione, avendo già dimostrato la (4)) segue infine dall'arbitrarietà di ε.

Rimane soltanto da dimostrare (7). Per farlo basterà applicare il teorema di Lagrange del valor medio alle componenti di γ. Esso ci garantisce l'esistenza di $s_{ij} \in (t_j, t_{j+1})$ tali che:

$$\left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left| \gamma_i'(t_j) - \frac{\gamma_i(t_{j+1}) - \gamma_i(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \gamma_i'(t_j) - \gamma_i'(s_{ij}) \right|.$$

La disuguaglianza (7) segue ora subito da (6). □

NOTA BENE: La definizione di integrale sottintesa (è la prima volta che la incontriamo!) nella formula (5) è la seguente:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t) dt := \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_1'(t) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_2'(t) dt, \dots, \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_n'(t) dt \right).$$

NOTA BENE: Se disponessimo del teorema di Lagrange del valor medio per i campi di vettori, potremmo applicarlo a γ per ottenere una dimostrazione più diretta di (7). Eviteremmo così di passare alle componenti scalari γ_i. Purtroppo però un tale teorema non vale. Per esempio $\lambda(t) := (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, soddisfa

$$\frac{\lambda(2\pi) - \lambda(0)}{2\pi - 0} = 0$$

mentre $\lambda'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$.

Lezione del 28/9/04 (2 ore)

OSSERVAZIONE: Anche alla luce di Proposizione 6, si potrebbe essere indotti a pensare che l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedrali inscritte in una superficie "liscia" Σ possa essere assunto quale ragionevole definizione dell'area di Σ. Questo però non può essere vero! Infatti tale estremo superiore vale $+\infty$ per tutte le superfici liscie e curve. Il caso del cilindro: esempio di Schwarz.

Esempi ed esercizi.

Esempi di campo vettoriale (in particolare: il campo unitario tangente a una curva, campo elettrico). Definizione di curva regolare a tratti orientata (notazione $\overline{C} = (C, \tau)$).

Definizione 5. *Una curva C^1 a tratti orientata in $\mathbf{R}^n$ è una coppia $\overline{C} = (C, \tau)$ tale che:*

(i) *C è una curva C^1 a tratti;*
(ii) *$\tau : C \to \mathbf{R}^n$ è un campo tangente a C, unitario e continuo nelle "componenti liscie" di C.*

Nel caso che C sia una curva C^1 a tratti e adatta all'integrazione, si dice che $\overline{C}$ è una curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione.

Una parametrizzazione regolare a tratti di C è detta compatibile con l'orientazione se ogni sua componente regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ soddisfa $\tau \circ \gamma \equiv \gamma'/\|\gamma'\|$.

Definizione 6. *Sia $\overline{C} = (C, \tau)$ una curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione (in $\mathbf{R}^n$). Se $F : C \to \mathbf{R}^n$ è un campo continuo, definiamo l'integrale di F lungo $\overline{C}$ come il numero*

$$\int_{\overline{C}} F := \int_C F \bullet \tau.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overline{C}} F \bullet ds$ (per $n = 2, 3$), $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy$ (se $n = 2$), $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (se $n = 3$).

OSSERVAZIONE: Sia $\overline{C} = (C, \tau)$ una curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione (in $\mathbf{R}^n$) e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una parametrizzazione regolare a tratti compatibile con l'orientazione di $\overline{C}$. Poiché $\gamma' \equiv \|\gamma'\| \tau \circ \gamma$ (eccetto per un numero finito di punti), si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C}} F \bullet \tau = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \tau(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt.$$

Esempi.

Lezione del 29/9/04 (2 ore)

Intervalli aperto a destra in $\mathbf{R}^n$. Funzioni semplici in $\mathbf{R}^n$.

OSSERVAZIONE: Sia φ una funzione semplice in $\mathbf{R}^n$. Allora, naturalmente, esistono infinite combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di intervalli aperti a destra che rappresentano φ.

Una quantità che invece non cambia, al variare di tali combinazioni

$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \varphi_{D_j},$$

è il numero

$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j m_n(D_j)$$

che in effetti si può interpretare come il volume orientato della regione compresa fra $\mathbf{R}^n$ e il grafico di φ. Dunque, senza ambiguità, potremo chiamere tale numero integrale di φ in $\mathbf{R}^n$ e indicarlo con $I_n(\varphi)$, cioè

$$I_n(\varphi) := \sum_{j=1}^{M} \lambda_j m_n(D_j).$$

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nulla fuori di un insieme limitato e limitata. Indichiamo con $\Sigma_-(f)$ l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbf{R}^n$ tali che $\varphi \leq f$. Analogamente $\Sigma_+(f)$ è l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbf{R}^n$ tali che $\varphi \geq f$.

OSSERVAZIONE: Se poniamo

$$I_n^-(f) := \sup \{ I_n(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_-(f) \}, \qquad I_n^+(f) := \inf \{ I_n(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_+(f) \}$$

si ha

$$I_n^-(f) \leq I_n^+(f).$$

Definizione 7. *Diremo che $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (nulla fuori di un insieme limitato e limitata) è integrabile secondo Riemann (o Riemann integrabile) se*

$$I_n^-(f) = I_n^+(f) \in \mathbf{R}.$$

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbf{R}^n} f := I_n^-(f) = I_n^+(f).$$

L'insieme di tali funzioni è indicato con $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$.

Notazione alternativa: $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx$, $\iint \ldots \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

OSSERVAZIONE: Non è sempre detto che si abbia $I_n^-(f) = I_n^+(f)$. Per esempio, se f è la funzione caratteristica della "polvere razionale" del piano e $D := [0,1]^2$, allora $I_n^-(f) = 0$ mentre $I_n^+(f) = 1$.

OSSERVAZIONE: L'integrale su $\mathbf{R}^n$ estende l'operatore I_n dall'insieme delle funzioni semplici in $\mathbf{R}^n$ a tutto $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. Più precisamente: se φ è una funzione semplice in $\mathbf{R}^n$, allora $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e si ha $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = I_n(\varphi)$.

Proposizione 7. *$\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ è uno spazio vettoriale e la mappa*

$$\mathcal{R}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}, \qquad f \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f :$$

è lineare.

DIMOSTRAZIONE: Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. Dimostriamo che allora
$$f + g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$$
e
$$\int_{\mathbf{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbf{R}^n} f + \int_{\mathbf{R}^n} g.$$
Infatti, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esistono
$$\varphi_- \in \Sigma_-(f), \quad \varphi_+ \in \Sigma_+(f), \quad \psi_- \in \Sigma_-(g), \quad \psi_+ \in \Sigma_+(g)$$
tali che
$$I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) \leq \varepsilon, \qquad I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \leq \varepsilon. \tag{8}$$
Ma
$$\varphi_- + \psi_- \in \Sigma_-(f+g), \qquad \varphi_+ + \psi_+ \in \Sigma_+(f+g)$$
e si ha
$$\begin{aligned} I_n(\varphi_+ + \psi_+) - I_n(\varphi_- + \psi_-) &= I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \\ &= I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$
per (8). A maggior ragione dunque
$$I_n^+(f+g) - I_n^-(f+g) \leq 2\varepsilon$$
da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che
$$I_n^-(f+g) = I_n^+(f+g)$$
e cioè che $f+g$ è Riemann integrabile. Inoltre, poiché
$$I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_-) = I_n(\varphi_- + \psi_-) \leq \int_{\mathbf{R}^n} (f+g) \leq I_n(\varphi_+ + \psi_+) = I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+)$$
e
$$I_n(\varphi_-) \leq \int_{\mathbf{R}^n} f \leq I_n(\varphi_+), \qquad I_n(\psi_-) \leq \int_{\mathbf{R}^n} g \leq I_n(\psi_+)$$
si trova anche
$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f + \int_{\mathbf{R}^n} g - \int_{\mathbf{R}^n} (f+g) \right| \leq I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \leq 2\varepsilon.$$
Invocando nuovamente l'arbitrarietà di ε, otteniamo
$$\int_{\mathbf{R}^n} f + \int_{\mathbf{R}^n} g - \int_{\mathbf{R}^n} (f+g) = 0$$
ossia
$$\int_{\mathbf{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbf{R}^n} f + \int_{\mathbf{R}^n} g.$$

Procedendo in modo analogo, si prova che se $f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ allora $\lambda f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e si ha
$$\int_{\mathbf{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbf{R}^n} f.$$
□

Proposizione 8. *$\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ è un reticolo.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. Dato che

$$f \wedge g = -\big((-f) \vee (-g)\big)$$

sarà sufficiente dimostrare che

$$f \vee g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n). \tag{9}$$

Per farlo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$\varphi_- \in \Sigma_-(f), \quad \varphi_+ \in \Sigma_+(f), \quad \psi_- \in \Sigma_-(g), \quad \psi_+ \in \Sigma_+(g)$$

tali che

$$I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) \leq \varepsilon, \qquad I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Ovviamente

$$\varphi_- \vee \psi_- \in \Sigma_-(f \vee g), \qquad \varphi_+ \vee \psi_+ \in \Sigma_+(f \vee g).$$

Inoltre, come proveremo in seguito, si ha

$$I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-). \tag{11}$$

Da questa e da (10) troviamo subito che

$$I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq 2\varepsilon$$

e quindi, a maggior ragione, si ha

$$I_n^+(f \vee g) - I_n^-(f \vee g) \leq 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue ora la (9).

Rimane da dimostrare la disuguaglianza (11). A questo scopo, osserviamo prima di tutto che le funzioni semplici $\varphi_-, \varphi_+, \psi_-, \psi_+$ possono supporsi essere tutte e quattro combinazioni lineari di funzioni caratteristiche degli stessi intervalli aperti a destra D_j, con $j \in J := \{1, \ldots, N\}$. Per $j \in J$ scegliamo poi $x_j \in D_j$, poniamo

$$J_* := \{j \in J \mid \varphi_+(x_j) \geq \psi_+(x_j)\}$$

e osserviamo che J_* non dipende dalla scelta degli x_j.

Allora, per $j \in J_*$, si ha

$$(\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j) - (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j) = \varphi_+(x_j) - \varphi_-(x_j) \vee \psi_-(x_j) \leq \varphi_+(x_j) - \varphi_-(x_j)$$

e analogamente, per $j \in J \backslash J_*$, vale

$$(\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j) - (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j) = \psi_+(x_j) - \varphi_-(x_j) \vee \psi_-(x_j) \leq \psi_+(x_j) - \psi_-(x_j).$$

Da queste due disuguaglianze segue subito che

$$\begin{aligned}
I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) &= \sum_{j\in J_*} (\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j)\, m_n(D_j) + \sum_{j\in J\setminus J_*} (\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j)\, m_n(D_j) + \\
&\quad - \sum_{j\in J_*} (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j)\, m_n(D_j) - \sum_{j\in J\setminus J_*} (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j)\, m_n(D_j) \\
&= \sum_{j\in J_*} \Big((\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j) - (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j) \Big)\, m_n(D_j) + \\
&\quad + \sum_{j\in J\setminus J_*} \Big((\varphi_+ \vee \psi_+)(x_j) - (\varphi_- \vee \psi_-)(x_j) \Big)\, m_n(D_j) \\
&\le \sum_{j\in J_*} \Big(\varphi_+(x_j) - \varphi_-(x_j) \Big) m_n(D_j) + \\
&\quad + \sum_{j\in J\setminus J_*} \Big(\psi_+(x_j) - \psi_-(x_j) \Big) m_n(D_j) \\
&\le \sum_{j\in J} \Big(\varphi_+(x_j) - \varphi_-(x_j) \Big) m_n(D_j) + \\
&\quad + \sum_{j\in J} \Big(\psi_+(x_j) - \psi_-(x_j) \Big) m_n(D_j) \\
&= I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) \;+\; I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-)
\end{aligned}$$

e cioè proprio la disuguaglianza (11). □

Come facile conseguenza delle precedenti proposizioni otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 9. *Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. Allora*

(1) *Se $f \ge g$, si ha $\int_{\mathbf{R}^n} f \ge \int_{\mathbf{R}^n} g$;*
(2) *$|f| \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e $\int_{\mathbf{R}^n} |f| \ge |\int_{\mathbf{R}^n} f|$.*

DIMOSTRAZIONE: Prima di tutto, Proposizione 7 implica che $f - g$ è Riemann integrabile e vale

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f - g) = \int_{\mathbf{R}^n} f - \int_{\mathbf{R}^n} g.$$

Dopodiché (1) segue subito notando che la funzione identicamente nulla appartiene a $\Sigma_-(f-g)$, quindi $\int_{\mathbf{R}^n}(f-g) \ge 0$.

Per dimostrare (2), osserviamo che

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0.$$

Proposizione 7 e Proposizione 8 garantiscono allora che $|f|$ è Riemann integrabile e, tenendo conto anche di (1), si trova

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}^n} f\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}^n} (f\vee 0 + f\wedge 0)\right| = \left|\int_{\mathbf{R}^n} f\vee 0 + \int_{\mathbf{R}^n} f\wedge 0\right| \\ &\le \left|\int_{\mathbf{R}^n} f\vee 0\right| + \left|\int_{\mathbf{R}^n} f\wedge 0\right| = \int_{\mathbf{R}^n} f\vee 0 - \int_{\mathbf{R}^n} f\wedge 0 \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f\vee 0 - f\wedge 0 = \int_{\mathbf{R}^n} |f|.\end{aligned}$$

□

Definizione 8. *Siano dati una funzione $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ e un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^n$. Diremo allora che f è Riemann integrabile in A se $f\varphi_A\in\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. L'insieme delle funzioni Riemann integrabili in A è indicato con $\mathcal{R}(A)$.*

OSSERVAZIONE: Si può ora facilmente dimostrare che per $\mathcal{R}(A)$ sussistono i risultati corrispondenti a Proposizione 7, Proposizione 8 e Proposizione 9.

INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA: [1] è un possibile testo di riferimento per la teoria dell'integrazione secondo Riemann, coerente con l'esposizione fattane a lezione e in queste note.

Lezione del 4/10/04 (2 ore)

Vale il seguente teorema di integrabilità di una funzione continua.

Teorema 1. *Sia A un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^n$ e supponiamo che valga la seguente condizione (che riassumeremo dicendo che "∂A ha misura zero"): per ogni $\varepsilon>0$ esistono due pluriintervalli aperti a destra P_I e P_E tali che*

$$P_I\subset A\subset P_E,\qquad m_n(P_E\backslash P_I)\le\varepsilon. \tag{12}$$

Allora ogni $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ che sia continua in A è anche Riemann integrabile in A.

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che f è uniformemente continua in A. Allora, fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tale che $|f(x)-f(x')|\le\varepsilon$, ogni volta che $x,x'\in A$ soddisfano $|x-x'|\le\delta$. Ora, presi P_I e P_E come in (12), possiamo supporre (suddividendo gli intervalli, se necessario) che

(i) la famiglia di intervalli $\{D_j\}_{j=1}^N$ costituenti P_I sia una sottofamiglia degli intervalli costituenti P_E, che potremo quindi indicare con $\{D_j\}_{j=1}^{N+k}$;
(ii) il diametro di ogni D_j, con $j=1,\dots,N$, non superi δ.

Poniamo

$$\psi_- := \sum_{j=1}^N \left(\min_{\overline{D_j}} f\right)\varphi_{D_j}$$

e

$$\psi_+ := \sum_{j=1}^N \left(\max_{\overline{D_j}} f\right)\varphi_{D_j} + \sum_{j=N+1}^{N+k} M\varphi_{D_j},\qquad M:=\max_A f$$

e osserviamo che

$$\psi_- \in \Sigma_-(f), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f).$$

Se indichiamo con I_0 un qualsiasi intervallo fissato contenente A e scegliamo $\xi_j, \eta_j \in \overline{D_j}$ in modo che

$$f(\xi_j) = \max_{\overline{D_j}} f, \qquad f(\eta_j) = \min_{\overline{D_j}} f,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
I_n^+(f) - I_n^-(f) &\leq I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\
&= \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j) m_n(D_j) + \sum_{j=N+1}^{N+k} M\, m_n(D_j) - \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j) m_n(D_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(f(\eta_j) - f(\xi_j)\right) m_n(D_j) + M m_n(P_E \backslash P_I) \\
&\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{N} m_n(D_j) + \varepsilon |M| \\
&\leq \varepsilon \left(m_n(I_0) + |M|\right).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $I_n^+(f) = I_n^-(f)$. $\square$

Passiamo ora ai teoremi di integrazione iterata. Cominciamo dal caso dell'integrale d'area.

Teorema 2. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $x \mapsto f(x, y)$ è Riemann integrabile in $A_y := \{x \mid (x, y) \in A\}$, per ogni y, allora la funzione $y \mapsto \int_{A_y} f(x, y) dx$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy = \int_A f;$$

(2) *Se $y \mapsto f(x, y)$ è Riemann integrabile in $A_x := \{y \mid (x, y) \in A\}$, per ogni x, allora la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x, y) dy$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_A f.$$

DIMOSTRAZIONE: Sarà sufficiente provare (1), essendo la dimostrazione di (2) identica a quella di (1).

Supponiamo prima di tutto $A = \mathbf{R}^2$. Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare

$$\psi_- \in \Sigma_-(f), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f)$$

tali che

$$I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \leq \varepsilon.$$

Senza perdere in generalità possiamo supporre che esse siano combinazione lineare delle stesse funzioni caratteristiche, cioè

$$\psi_- = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{D_j}, \qquad \psi_+ = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{D_j}$$

con

$$D_j = A_j \times B_j, \qquad (A_j, B_j \text{ intervalli aperti a destra in } \mathbf{R}).$$

Osserviamo che , per ogni y fissato, le funzioni $x \mapsto \psi_-(x,y)$ e $x \mapsto \psi_+(x,y)$ sono semplici. Si ha più precisamente

$$\psi_-(\cdot,y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y)\varphi_{A_j}, \qquad \psi_+(\cdot,y) = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y)\varphi_{A_j}.$$

Poiché inoltre

$$\psi_-(\cdot,y) \le f(\cdot,y) \le \psi_+(\cdot,y)$$

per ogni y, segue da Proposizione 9 che

$$I_1(\psi_-(\cdot,y)) \le \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx \le I_1(\psi_+(\cdot,y))$$

e cioè

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j) \le \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx \le \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j)$$

per ogni y. Se poniamo

$$F(y) := \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx, \qquad \Psi_-(y) := \sum_{j=1}^N \lambda_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y), \qquad \Psi_+(y) := \sum_{j=1}^N \mu_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y)$$

allora si ha

$$\Psi_- \in \Sigma_-(F), \qquad \Psi_+ \in \Sigma_+(F).$$

Osservando che

$$I_1(\Psi_-) = \sum_{j=1}^N \lambda_j m_1(A_j) m_1(B_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j m_1(D_j) = I_2(\psi_-)$$

e

$$I_1(\Psi_+) = \sum_{j=1}^N \mu_j m_1(A_j) m_1(B_j) = \sum_{j=1}^N \mu_j m_1(D_j) = I_2(\psi_+)$$

troviamo prima di tutto che

$$I_1^+(F) - I_1^-(F) \le I_1(\Psi_+) - I_1(\Psi_-) = I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \le \varepsilon$$

e cioè, essendo ε arbitrario, che F è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$. Inoltre

$$I_2(\psi_-) \le I_1(\Psi_-) \le \int_{\mathbf{R}} F \le I_1(\Psi_+) \le I_2(\psi_+).$$

Poiché si ha anche

$$I_2(\psi_-) \le \int_{\mathbf{R}^2} f \le I_2(\psi_+)$$

si ottiene

$$\left| \int_{\mathbf{R}^2} f - \int_{\mathbf{R}} F \right| \le \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε
$$\int_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}} F.$$
Ciò conclude la dimostrazione di (1), nel caso $A = \mathbf{R}^2$.

Per dimostrare il caso generale relativo a un qualsiasi $A \subset \mathbf{R}^2$, basta osservare che
$$f(\cdot, y)\varphi_{A_y} = (f\varphi_A)(\cdot, y).$$
Da quanto dimostrato, segue allora che
$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\varphi_{A_y}(x)dx = \int_{A_y} f(x,y)dx$$
è Riemann integrabile e si ha
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx\right) dy &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx\right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} f\varphi_A \\ &= \int_A f.\end{aligned}$$
□

Analogamente si dimostrano i seguenti risultati relativi agli integrali di volume.

Teorema 3. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_z := \{(x,y) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni z, allora la funzione $z \mapsto \int_{A_z} f(x,y,z)dxdy$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$ e si ha*
$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_z} f(x,y,z)dxdy\right) dz = \int_A f;$$
(2) *Se $(x,z) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_y := \{(x,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni y, allora la funzione $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y,z)dxdz$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$ e si ha*
$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y,z)dxdz\right) dy = \int_A f;$$
(3) *Se $(y,z) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_x := \{(y,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni x, allora la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y,z)dydz$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$ e si ha*
$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{A_x} f(x,y,z)dydz\right) dx = \int_A f.$$

Teorema 4. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $z \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_{(x,y)} := \{z \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni (x,y), allora la funzione $(x,y) \mapsto \int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}^2$ e si ha*
$$\int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz\right) dxdy = \int_A f;$$

(2) *Se* $y \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(x,z)} := \{y \mid (x,y,z) \in A\}$*, per ogni* (x,z)*, allora la funzione* $(x,z) \mapsto \int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy$ *è Riemann integrabile in* $\mathbf{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy \right) dxdz = \int_A f;$$

(3) *Se* $x \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(y,z)} := \{x \mid (x,y,z) \in A\}$*, per ogni* (y,z)*, allora la funzione* $(y,z) \mapsto \int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx$ *è Riemann integrabile in* $\mathbf{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx \right) dydz = \int_A f.$$

OSSERVAZIONE: Il fatto che siano verificate le condizioni per l'esistenza dell'integrale iterato non implica, in generale, l'integrabilità. Per esempio, consideriamo $D \subset \mathbf{R}^2$ tale che

$$D_y = \begin{cases} [0,1] & \text{se } y \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \\ [1,2] & \text{se } y \in [0,1] \backslash \mathbf{Q} \\ \emptyset & \text{se } y \in \mathbf{R} \backslash [0,1] \end{cases}$$

e sia f la funzione caratteristica di D. Vediamo allora subito che $x \mapsto f(x,y)$ è Riemann integrabile in D_y per ogni y e si ha

$$\int_{D_y} f(x,y)dx = \varphi_{[0,1]}(y), \qquad y \in \mathbf{R}.$$

In particolare, quindi, anche $y \mapsto \int_{D_y} f(x,y)dx$ è Riemann integrabile in $\mathbf{R}$. Tuttavia la funzione f non è integrabile in D poiché, come si vede facilmente, si ha $I_2^-(f) = 0$ e $I_2^+(f) = 2$.

Definizione 9. *Un sottoinsieme* A *di* $\mathbf{R}^n$ *si dice misurabile secondo Riemann (in* $\mathbf{R}^n$*) se la sua funzione caratteristica è Riemann integrabile in* $\mathbf{R}^n$*, cioè se la funzione che vale identicamente 1 appartiene a* $\mathcal{R}(A)$*. In tal caso, si definisce la misura n-dimensionale di A (secondo Riemann) come il numero*

$$m_n(A) := \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_A = \int_A 1.$$

Notazione alternativa: $\mathcal{L}^n(A)$, $\mathcal{H}^n(A)$.

Lezione del 5/10/04 (2 ore)

OSSERVAZIONE: Sia A una regione "elementare", come per esempio: il rettangolo, il disco, il prisma, il cilindro, il cono, la sfera. Allora, com' è facile verificare, ∂A ha misura zero e dunque A è misurabile secondo Riemann (grazie a Teorema 1). Il calcolo esplicito di $\int_A 1$ in questi casi elementari conduce a risultati coerenti a quelli noti fin dall'antichità. Questo fatto, insieme con le proprietà generali di $\int_A 1$ (invarianza rispetto ad alcune clessi di trasformazioni), costituisce una buona motivazione per Definizione 9.

OSSERVAZIONE: Consideriamo una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, con $f \geq 0$ e definiamo il suo "sottografico":

$$S_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \in A,\ 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}.$$

Allora, sotto opportune ipotesi ulteriori (per esempio quelle di Teorema 1), si può applicare Teorema 4. Poiché

$$(S_f)_{(x,y)} = \begin{cases} [0, f(x,y)] & \text{se } (x,y) \in A \\ \emptyset & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

si trova

$$m_3(S_f) = \int_{S_f} 1 = \int_A \left(\int_{(S_f)_{(x,y)}} 1\, dz \right) dxdy = \int_A f(x,y)\, dxdy.$$

Proposizione 10. *Poniamo:*

$$\mathbb{P}(u,v) := \{ru + sv \mid r, s \in [0,1]\}, \qquad \textit{per } u, v \in \mathbf{R}^n \ (n = 2,3)$$

e

$$\mathbb{P}(u,v,w) := \{ru + sv + tw \mid r, s, t \in [0,1]\}, \qquad \textit{per } u, v, w \in \mathbf{R}^3.$$

allora si ha:

$$m_2(\mathbb{P}(u,v)) = \begin{cases} \|u \times v\| & \textit{se } u, v \in \mathbf{R}^3 \\ |\det(u|v)| & \textit{se } u, v \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

e

$$m_3(\mathbb{P}(u,v,w)) = |(u \times v) \bullet w| = |\det(u|v|w)|, \qquad \textit{se } u, v, w \in \mathbf{R}^3.$$

DIMOSTRAZIONE: La prima e la terza formula seguono subito dalla definizione di prodotto vettoriale data nel corso di Fisica e ricordando le proprietà del prodotto scalare. La seconda formula si ottiene infine dalla prima, come segue (se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$):

$$m_2(\mathbb{P}(u,v)) = \|(u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0)\| = |\det(u|v)|.$$

□

Lezione del 6/10/04 (2 ore)

Esempi di parametrizzazione di una superficie (grafico di una funzione di due variabili, sfera, cilindro).

OSSERVAZIONE: Ogni superficie liscia ammette parametrizzazioni non liscie. Inoltre esistono superfici non liscie con parametrizzazioni liscie (esempio: $\varphi(s,t) := (s^3, s^2, t)$, $(s,t) \in [-1,1]^2$).

Definizione 10. *Diremo che $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ è una parametrizzazione regolare (di superficie) se*

- (i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera è una curva dotata di una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$;*
- (ii) *φ è continua;*
- (iii) *$\varphi|A$ è iniettiva, di classe C^1 e soddisfa*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(P) \neq 0 \tag{13}$$

  per ogni $P \in A$;
- (iv) *$\varphi \circ \gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ è regolare a tratti.*

La seguente proposizione ci mostra come la condizione (13) serva a prevenire situazioni come quella descritta nella precedente osservazione.

Proposizione 11. *Sia φ come in Definizione 10 e cioè sia essa una parametrizzazione regolare di superficie. Allora $\varphi(A)$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $(s_0, t_0) \in A$. Per (13), deve essere verificata almeno una delle seguenti equazioni:

$$\det\left(\nabla\varphi_1(s_0,t_0)\big|\nabla\varphi_2(s_0,t_0)\right) \neq 0 \tag{14}$$

$$\det\left(\nabla\varphi_1(s_0,t_0)\big|\nabla\varphi_3(s_0,t_0)\right) \neq 0 \tag{15}$$

$$\det\left(\nabla\varphi_2(s_0,t_0)\big|\nabla\varphi_3(s_0,t_0)\right) \neq 0. \tag{16}$$

Proveremo adesso che se è verificata (14), allora, vicino a $P_0 := \varphi(s_0, t_0)$, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x, y).

In tal caso, infatti, essendo i campi $\nabla\varphi_j$ continui e ricordando il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue, troviamo che deve esistere un intorno di (s_0, t_0), contenuto in A, per ogni (s, t) del quale si ha

$$\det\left(\nabla\varphi_1(s,t)\big|\nabla\varphi_2(s,t)\right) \neq 0.$$

Il teorema di invertibilità locale (che è una facile conseguenza del teorema delle funzioni implicite di Dini; vedasi [1, 2]), prova allora l'esistenza di un intorno I di (s_0, t_0), $I \subset A$, tale che

$$\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)|I$$

è invertibile con inversa di classe C^1. A questo punto è facile verificare che $\varphi(I)$ è grafico di una funzione di classe C^1 e precisamente di

$$\varphi_3 \circ \Phi^{-1} : \Phi(I) \to \mathbf{R}.$$

Infatti, dire che $(x, y, z) \in \varphi(I)$ equivale a dire che

$$(x, y) = \Phi(s, t), \qquad z = \varphi_3(s, t)$$

per un certo $(s, t) \in I$, il che implica subito $z = \varphi_3 \circ \Phi^{-1}(x, y)$.

Analogamente si può verificare che se è verificata (15) (risp. (16), allora, vicino a P_0, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x, z) (risp. (y, z)). □

OSSERVAZIONE: Sia I un intorno di 0 in $\mathbf{R}$ e

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

una curva derivabile in 0. Sia poi A un intorno di $\gamma(0)$ e

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : A \to \mathbf{R}^3$$

una mappa differenziabile in $\gamma(0)$. Allora, per $j = 1, 2, 3$, la funzione $\varphi_j \circ \gamma$ è derivabile in 0 e si ha

$$(\varphi_j \circ \gamma)'(0) = \nabla\varphi_j(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0).$$

In altri termini, il campo $\varphi \circ \gamma$ è derivabile in 0 e

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\nabla\varphi_1(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0), \nabla\varphi_2(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0), \nabla\varphi_3(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0)) = d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0))$$

dove $d\varphi_{(s,t)}$ indica il differenziale di φ in (s,t), cioè la matrice

$$d\varphi_{(s,t)} := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \,\Big|\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \right).$$

Lezione del 11/10/04 (2 ore)

OSSERVAZIONE: Siano

$$\varphi : C \to \mathbf{R}^3, \qquad \psi : K \to \mathbf{R}^3$$

parametrizzazioni regolari di superficie equivalenti, cioè tali che

$$\varphi(C) = \psi(K).$$

Se (s_0,t_0) e (u_0,v_0) sono rispettivamente un punto interno a C e un punto interno a K, non è difficile provare che

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2) = d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbf{R}^2).$$

OSSERVAZIONE: Se $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ è una parametrizzazione regolare di superficie e se (s_0,t_0) è un punto interno di C, allora $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2)$ è uno spazio vettoriale di dimensione due. Una sua base è data da

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \right\}.$$

Proposizione 12. *Sia data una parametrizzazione regolare di superficie $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ e sia (s_0,t_0) un punto interno di C. Allora $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2)$ se e soltanto se esiste $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to C$ derivabile in 0 e tale che*

(17) $$\gamma(0) = (s_0,t_0), \qquad (\varphi \circ \gamma)'(0) = v.$$

DIMOSTRAZIONE: Se $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2)$, cioè se $v = d\varphi_{(s_0,t_0)}(w)$ per un certo $w \in \mathbf{R}^2$, allora basta porre

$$\gamma(\rho) := (s_0,t_0) + \rho w, \quad \rho \in [-1,1]$$

e (17) risulta verificata, per l'ultima osservazione della lezione precedente.

Viceversa, se esiste $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to C$ derivabile in 0 e tale che vale (17), basta invocare di nuovo l'ultima osservazione della lezione precedente per trovare che

$$v = (\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d\varphi_{(s_0,t_0)}(\gamma'(0)) \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2).$$

□

Proposizione 12 motiva la seguente definizione, mentre la prima delle osservazioni precedente ci mostra che essa non dipende dalla scelta della parametrizzazione regolare.

Definizione 11. *Sia S una superficie dotata di una parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ e sia $P_0 := \varphi(s_0,t_0)$, con (s_0,t_0) tunto interno di C. Allora lo spazio vettoriale bidimensionale $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbf{R}^2)$ è denominato piano tangente a S in P_0 e viene indicato con la notazione $T_{P_0}S$. Ogni suo elemento viene detto vettore tangente a S in P_0.*

Vogliamo ora passare a definire l'integrale di una funzione su una superficie e, in particolare, una nozione di misura delle superfici che estenda coerentemente l'area nota di superfici "elementari" come la porzione poligonale di piano, il cono, il cilindro o la sfera. Volendo riprendere l'idea di considerare le superfici poliedrali (triangolari), ci si deve ricordare dell'esempio di Schwartz (vedi lezione del 28/9/03). Esso ci indica che i triangoli debbono essere scelti di modo che, passando al limite, essi tendano a disporsi "in posizione tangente".

OSSERVAZIONE: Consideriamo una parametrizzazione regolare di superficie $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ e sia (s_0, t_0) un punto interno di C. Siano poi $\tau(\varepsilon)$ e $\tau_\varphi(\varepsilon)$, rispettivamente, il triangolo interno a C di vertici (s_0, t_0), $(s_0, t_0) + \varepsilon\hat{s}$, $(s_0, t_0) + \varepsilon\hat{t}$ e quello inscritto in $\varphi(C) \subset \mathbf{R}^3$ di vertici $\varphi(s_0, t_0)$, $\varphi((s_0, t_0) + \varepsilon\hat{s})$, $\varphi((s_0, t_0) + \varepsilon\hat{t})$. Le ben note uguaglianze

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{s}) - \varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{t}) - \varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0).$$

ci mostrano che il triangolo $\tau_\varphi(\varepsilon)$ tende (quando $\varepsilon \to 0$) a disporsi "in posizione tangente" a S in $\varphi(s_0, t_0)$. Inoltre si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\text{area di } \tau_\varphi(\varepsilon)}{\text{area di } \tau(\varepsilon)} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \right\|. \tag{18}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\text{area di } \tau_\varphi(\varepsilon)}{\text{area di } \tau(\varepsilon)} &= \frac{\text{area di } \mathbb{P}(\varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{s}) - \varphi(s_0,t_0), \varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{t}) - \varphi(s_0,t_0))}{\varepsilon^2} \\ &= \left\| \frac{\varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{s}) - \varphi(s_0,t_0))}{\varepsilon} \times \frac{\varphi((s_0,t_0)+\varepsilon\hat{t}) - \varphi(s_0,t_0))}{\varepsilon} \right\| \end{aligned}$$

per Proposizione 10. Il numero al secondo membro di (18) si candida dunque ad essere il "fattore di trasformazione dell'area" indotto da φ in (s_0, t_0).

Ci aspettiamo quindi che se f è una funzione continua in $S := \varphi(C)$ e se

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|$$

è limitata nella parte interna di C, allora

$$\int_C f \circ \varphi \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|$$

costituisca il candidato naturale per la definizione di $\int_S f$.

In effetti, si verifica facilmente che:

- Se $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ è una parametrizzazione regolare di una superficie di cui sia nota elementarmente l'area (e.g. una porzione poligonale di piano, un cilindro, un cono, una sfera), allora tale area coincide con
$$\int_C \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|.$$
Inoltre, tale quantità è invariante rispetto alla traslazione (cioè non cambia se si prende $\varphi + P$ in luogo di φ) e si trasforma quadraticamente rispetto alle omotetie (cioè, se si prende $\lambda\varphi$ al posto di φ si ottiene il numero precedente moltiplicato per λ^2);

- Vale il seguente risultato sull'indipendenza dalla parametrizzazione, corrispondente a Proposizione 5 per le curve:

  Proposizione 13. *Se $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ e $\psi : K \to \mathbf{R}^3$ sono parametrizzazioni regolari di superficie equivalenti, cioè*
  $$\varphi(C) = \psi(K)$$
  e se
  $$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|, \qquad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|$$
  sono limitate, rispettivamente, nella parte interna di C e nella parte interna di K, allora si ha
  $$\int_C f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \int_K f \circ \psi \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|.$$

Possiamo finalmente definire l'integrale di una funzione su una superficie.

Definizione 12. *Una parametrizzazione regolare a tratti (di superficie) è una mappa*
$$\varphi : C \to \mathbf{R}^3$$
tale che $\varphi|(C \backslash \partial C)$ è iniettiva e gode della seguente ulteriore proprietà. Esistono $C_1, \dots, C_N$ insiemi compatti tali che

(i) $C = \cup_{j=1}^N C_j$;
(ii) $C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$, *se* $i \neq j$;
(iii) *per ogni* $j = 1, \dots, N$, *la mappa* $\varphi|C_j$ *è una parametrizzazione regolare di superficie.*

Una superficie dotata di una parametrizzazione regolare a tratti è detta C^1 a tratti.

Definizione 13. *Una superficie S è detta C^1 a tratti e adatta all'integrazione se essa è C^1 a tratti e se per una delle parametrizzazioni regolari $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ di cui è dotata si ha che*
$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|$$
è limitata nella parte interna di C. In tal caso, se f è una funzione continua in S, si pone:
$$\int_S f := \int_C f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|.$$
Notazione alternativa: $\int_S f \, d\sigma$, $\int_S f \, d\mathcal{H}^2$.

Lezione del 12/10/04 (2 ore)

OSSERVAZIONE: Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^2$, chiusura di un aperto la cui frontiera è una curva regolare a tratti. Sia poi f una funzione continua in C. Allora è facile verificare che

(1) f è integrabile in C;
(2) l'insieme $\widetilde{C} := \{(x, y, 0) \,|\, (x, y) \in C\}$ è una superficie adatta all'integrazione (parametrizzazione scontata: $\varphi(x, y) := (x, y, 0)$, $(x, y) \in C$;

(3) se si considera la funzione continua $\widetilde{f} : \widetilde{C} \to \mathbf{R}$ definita come segue

$$\widetilde{f}(x, y, z) := f(x, y)$$

allora si ha

$$\int_C f = \int_{\widetilde{C}} \widetilde{f}.$$

Quest'ultima uguaglianza ci permette di interpretare l'integrale d'area come integrale di superficie.

Possiamo ora definire la misura delle superfici adatte all'integrazione. Per evidenti ragioni, adotteremo la stessa notazione di Definizione 9.

Definizione 14. *Se S è una superficie adatta all'integrazione, definiamo la* <u>*misura*</u> *(area) di S come*

$$m_2(S) := \int_S 1.$$

Notazione alternativa: $\mathcal{H}^2(S)$.

Definizione 15. *Una* <u>*superficie C^1 a tratti orientata*</u> *in $\mathbf{R}^3$ è una coppia $\overline{S} = (S, N)$ tale che (adottando la notazione di Definizione 12):*

(i) *S è una superficie C^1 a tratti, cioè S è dotata di una parametrizzazione regolare a tratti $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$;*
(ii) *$N : S \to \mathbf{R}^3$ è un campo ortogonale a S, unitario e continuo nelle "componenti liscie" di S, cioè*

$$N(\varphi(s,t)) = \sigma(s,t) \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \right\|}$$

per ogni (s, t) nell'unione delle parti interne dei C_j, dove σ prende i valori ± 1 ed è costante sulle parti interne dei C_j.

Se S è una superficie C^1 a tratti e adatta all'integrazione, si dice che $\overline{S}$ è una <u>*superficie C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione*</u>.

Nel caso che $\sigma \equiv 1$, si dice che φ è <u>*compatibile con l'orientazione di $\overline{S}$*</u>.

Definizione 16. *Sia $\overline{S} = (S, N)$ una superficie C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione. Se $F : S \to \mathbf{R}^3$ è un campo continuo, allora l'integrale di F su $\overline{S}$ è definito come segue:*

$$\int_{\overline{S}} F := \int_S F \bullet N.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overline{S}} F \bullet d\sigma$.

OSSERVAZIONE: Sia $\overline{S} = (S, N)$ è una superficie C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione. Supponiamo inoltre che la parametrizzazione $\varphi : C \to \mathbf{R}^3$ sottintesa in Definizione 16 sia compatibile con l'orientazione di $\overline{S}$, per cui si abbia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| N \circ \varphi.$$

Ne segue che

$$\int_{\overline{S}} F := \int_C (F\circ\varphi) \bullet (N\circ\varphi) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \int_C (F\circ\varphi) \bullet \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right).$$

Esempi.

Definizione 17. *Una mappa $\varphi : C \to \mathbf{R}^n$, $C \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2,3)$, è detta trasformazione regolare se sono verificate le seguenti condizioni:*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^n$, chiusura di un aperto A la cui frontiera è dotata di una parametrizzazione regolare a tratti γ;*
(ii) *φ è continua;*
(iii) *$\varphi|A$ è iniettiva, di classe C^1 e soddisfa $J\varphi(P) \neq 0$ per ogni $P \in A$, dove*

$$J\varphi := \begin{cases} \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right)\right|, & se\ n = 2 \\ \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right)\right|, & se\ n = 3 \end{cases}$$

(iv) *$\varphi \circ \gamma$ è regolare a tratti.*

Lezione del 13/10/04 (2 ore)

Siamo pronti per enunciare il teorema sulla formula per il cambiamento di variabile negli integrali d'area e di volume.

Teorema 5. *Sia data una trasformazione regolare $\varphi : C \to \mathbf{R}^n$, $C \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2,3)$ tale che $J\varphi$ è limitato in $C\backslash\partial C$. Inoltre sia $f : \varphi(C) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Vale allora la seguente uguaglianza*

$$\int_{\varphi(C)} f = \int_C (f\circ\varphi)\, J\varphi.$$

DIMOSTRAZIONE (Sketch): Per cominciare, sia P un punto interno di C. Nel caso $n = 2$, indichiamo poi con $Q(P,\varepsilon)$ il quadrato univocamente identificato dalla terna di vertici

$$P, \quad P+\varepsilon\hat{u}, \quad P+\varepsilon\hat{v} \qquad (\{\hat{u},\hat{v}\} \text{ base canonica di } \mathbf{R}^2) \tag{19}$$

e con $Q_\varphi(P,\varepsilon)$ il parallelogramma univocamente identificato dalla terna di vertici ottenuta come immagine attraverso φ dei punti elencati in (19) e cioè $\varphi(P), \varphi(P+\varepsilon\hat{u}), \varphi(P+\varepsilon\hat{v})$. Analogamente, nel caso $n = 3$, con $C(P,\varepsilon)$ e $C_\varphi(P,\varepsilon)$ indicheremo rispettivamente il cubo univocamente identificato dai vertici

$$P, \quad P+\varepsilon\hat{u}, \quad P+\varepsilon\hat{v}, \quad P+\varepsilon\hat{w} \qquad (\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\} \text{ base canonica di } \mathbf{R}^3)$$

e il prisma univocamente identificato dalle immagini $\varphi(P), \varphi(P+\varepsilon\hat{u}), \varphi(P+\varepsilon\hat{v}), \varphi(P+\varepsilon\hat{w})$.

In seguito sarà utile riferirci a P chiamandolo "vertice base".

Lo stesso argomento che era servito per dimostrare l'uguaglianza (18) ci permette di concludere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\text{area di } Q_\varphi(P,\varepsilon)}{\text{area di } Q(P,\varepsilon)} = \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(P)\middle|\frac{\partial\varphi}{\partial v}(P)\right)\right| = J\varphi(P)$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\text{area di } C_\varphi(P,\varepsilon)}{\text{area di } C(P,\varepsilon)} &= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(P)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(P)\right)\bullet\frac{\partial\varphi}{\partial w}(P)\right| \\ &= \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(P)\middle|\frac{\partial\varphi}{\partial v}(P)\middle|\frac{\partial\varphi}{\partial w}(P)\right)\right| \\ &= J\varphi(P).\end{aligned}$$

La funzione $J\varphi$ introdotta nel corso della precedente lezione è dunque interpretabile come "fattore di trasformazione" della misura (area e volume).

Lo sketch della dimostrazione, che per semplicità della notazione completeremo solo nel caso $n=2$ (però l'argomento è generale!), procede come segue. Consideriamo un reticolo quadrato (cubico, se $n=3$) di passo ε, indichiamo con $\{P_j\}$ i nodi di questo reticolo e con I_ε l'insieme degli indici j tali che $Q(P_j,\varepsilon)$ è contenuto in $C\backslash\partial C$.

Allora, come risulta intuitivamente chiaro, si può verificare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in I_\varepsilon}(\text{area di } Q(P_j,\varepsilon))\, J\varphi(P_j) f(\varphi(P_j)) = \int_C (f\circ\varphi)\, J\varphi.$$

Inoltre si può provare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in I_\varepsilon}(\text{area di } Q_\varphi(P_j,\varepsilon))\, f(\varphi(P_j)) = \int_{\varphi(C)} f$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in I_\varepsilon}(\text{area di } Q_\varphi(P_j,\varepsilon))\, f(\varphi(P_j)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in I_\varepsilon}(\text{area di } Q(P_j,\varepsilon))\, J\varphi(P_j) f(\varphi(P_j)).$$

Come si può facilmente intuire, la dimostrazione di quest'ultima si basa sull'interpretazione di $J\varphi$ come fattore di trasformazione della misura (vedi sopra).

Ciò conclude, evidentemente, il nostro ragionamento. $\square$

Calcolo del fattore di trasformazione in alcuni casi notevoli: coordinate polari, coordinate cilindriche e coordinate sferiche.

Esempi.

Lezione del 18/10/04 (2 ore)

Enunceremo oggi il Teorema di Gauss della divergenza e il Teorema di Stokes, dei quali daremo la dimostrazione in una delle prossime lezioni.

Teorema 6. *Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera C^1 a tratti e adatta all'integrazione. Indichiamo con N il campo normale a ∂C uscente da C e sia $F : C \to \mathbf{R}^n$ continuo, di classe C^1 in A e con derivate parziali limitate. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet N = \int_C \text{div } F.$$

OSSERVAZIONE: Consideriamo il caso $n = 2$ e supponiamo che C, F soddisfino alle ipotesi di Teorema di 6. Se

- con τ indichiamo il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C, cioè quello ottenuto ruotando N (il campo normale a ∂C uscente da C) di $\pi/2$ in senso antiorario,
- con R indichiamo l'operatore di rotazione di $\pi/2$ in senso orario in $\mathbf{R}^2$, i.e. $R(a, b) = (b, -a)$,

allora il Teorema di Gauss implica che

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_{\partial C} RF \bullet R\tau = \int_C (F_2, -F_1) \bullet N = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Vale pertanto il seguente risultato (Teorema di Green).

Teorema 7. *Sia $C \subset \mathbf{R}^2$ compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera C^1 a tratti e adatta all'integrazione. Indichiamo con N il campo normale a ∂C uscente da C e sia $F : C \to \mathbf{R}^n$ continuo, di classe C^1 in A e con derivate parziali limitate. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

dove τ è il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C.

Frontiera orientata $\partial \overline{S}$ di una superficie C^1 a tratti orientata $\overline{S} = (S, N)$ tale che ∂S è regolare a tratti. Vale il seguente risultato (Teorema di Stokes).

Teorema 8. *Sia $\overline{S} = (S, N)$ una superficie C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione tale che ∂S è C^1 a tratti e adatta all'integrazione. Allora, se $F : A \to \mathbf{R}^3$ è un campo di classe C^1, con A sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^3$ e $S \subset A$, si ha*

$$\int_{\overline{S}} \text{rot } F = \int_{\partial \overline{S}} F.$$

Esempi.

Lezione del 19/10/04 (2 ore)

Prima di dimostrare il Teorema 6 di Gauss, diamo la seguente definizione.

Definizione 18. *Un insieme compatto $C \subset \mathbf{R}^3$ si dice semplice se esso è la chiusura di un aperto A e se nelle direzioni degli assi coordinati è compreso fra grafici di funzioni lisce a tratti, cioè*

$$\begin{aligned} C &= \left\{(x,y,z) \,|\, a(x,y) \le z \le b(x,y), \quad (x,y) \in \overline{A^{(z)}}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \,|\, c(x,z) \le y \le d(x,z), \quad (x,z) \in \overline{A^{(y)}}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \,|\, e(y,z) \le x \le f(y,z), \quad (y,z) \in \overline{A^{(x)}}\right\} \end{aligned}$$

dove $A^{(x)}$, $A^{(y)}$, $A^{(z)}$ sono le proiezioni ortogonali di A, rispettivamente nei piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e inoltre:

- *le funzioni a, b sono continue in $\overline{A^{(z)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *le funzioni c, d sono continue in $\overline{A^{(y)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *le funzioni e, f sono continue in $\overline{A^{(x)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(x)}$.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS (per $n = 3$): Ci limiteremo a dimostrare il teorema per insiemi C che sono unione finita di insiemi semplici.

Passo 1: C semplice.

Dimostreremo che si hanno le seguenti uguaglianze

$$\int_C \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_{\partial C} F_1 N_1, \qquad \int_C \frac{\partial F_2}{\partial y} = \int_{\partial C} F_2 N_2, \qquad \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} = \int_{\partial C} F_3 N_3 \tag{20}$$

dalle quali, sommando, si ottiene subito la formula di Stokes. Cominciamo col provare la terza uguaglianza. Si ha

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} &= \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{C_{(x,y)}} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy = \int_{A^{(z)}} \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \int_{A^{(z)}} F_3(x,y,b(x,y)) - F_3(x,y,a(x,y))\, dxdy \end{aligned} \tag{21}$$

per Teorema 4. Indichiamo con G_a e G_b rispettivamente i grafici di a e di b e poniamo

$$S := \partial C \backslash (G_a \cup G_b).$$

Per $(x,y) \in \overline{A^{(z)}}$ definiamo inoltre

$$\varphi(x,y) := (x,y,a(x,y)), \qquad \psi(x,y) := (x,y,b(x,y))$$

e osserviamo che

$$N_3|S \equiv 0, \qquad (N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = -1, \qquad (N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| = 1.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} F_3 N_3 &= \int_{G_a} F_3 N_3 + \int_{G_b} F_3 N_3 \\ &= \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \varphi)(N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| + \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \psi)(N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| \\ &= \int_{A^{(z)}} F_3 \circ \psi - F_3 \circ \varphi \end{aligned}$$

da cui, tenuto conto di (21), segue la terza uguaglianza di (20). Lo stesso ragionamento permette di dimostrare le prime due uguaglianze di (20). Come abbiamo già spiegato sopra, a questo punto si conclude sommando le tre uguaglianze di (20).

Passo 2: $C = \cup_{j=1}^{h} C_j$, dove i C_j sono semplici e si intersecano al più in regioni di frontiera, e cioè

$$C_j \cap C_k = \partial C_j \cap \partial C_k \qquad (j \neq k).$$

Per illustrare il regionamento, sarà sufficiente capire il caso $h = 2$. Supponiamo pertanto che $C = C_1 \cup C_2$, con C_1, C_2 insiemi semplici tali che

$$C_1 \cap C_2 = \partial C_1 \cap \partial C_2.$$

Se indichiamo con N' e N'' rispettivamente i campi normali a ∂C_1 e ∂C_2, uscenti da C_1 e C_2, e poniamo

$$I := \partial C_1 \cap \partial C_2, \qquad \partial^* C_1 := \partial C_1 \backslash I, \qquad \partial^* C_2 := \partial C_2 \backslash I$$

allora si vede subito che

- $N'|I \equiv -N''|I$, cioè $N' + N'' \equiv 0$ in I;
- $\partial^* C_1 \cap \partial^* C_2 = \emptyset$ e $\partial^* C_1 \cup \partial^* C_2 = \partial C$;
- $N|\partial^* C_1 \equiv N'|\partial^* C_1$ e $N|\partial^* C_2 \equiv N''|\partial^* C_2$.

Otteniamo così, tenendo conto anche di quanto dimostrato nel primo passo, che vale

$$\begin{aligned}
\int_C \text{div } F &= \int_{C_1} \text{div } F + \int_{C_2} \text{div } F = \int_{\partial C_1} F \bullet N' + \int_{\partial C_2} F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N' + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N'' + \int_I F \bullet N' + \int_I F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N + \int_I F \bullet (N' + N'') \\
&= \int_{\partial C} F \bullet N.
\end{aligned}$$

□

La dimostrazione del Teorema di Gauss per $n = 2$ (identica a quella per $n = 3$) è lasciata come esercizio.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI STOKES: Ci limiteremo a dimostrare il risultato nel caso che:

(i) S sia il grafico di una funzione $f|C$, dove $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ e C soddisfa le ipotesi di Teorema 7 (Green);
(ii) il campo normale a S scelto sia quello per cui risulta $N_3 > 0$.

L'estensione al caso in cui C è unione finita e disgiunta (a meno di regioni di frontiera) di insiemi siffatti si ottiene con un argomento analogo a quello utilizzato nel secondo passo della dimostrazione del Teorema della divergenza.

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ una parametrizzazione regolare di ∂C (coerente con la sua orientazione positiva) e poniamo
$$\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma(t))) = (\gamma(t); f(\gamma(t))), \qquad t \in [a,b].$$
Si ha allora
$$\begin{aligned}\int_{\partial \overline{S}} F &= \int_a^b (F \circ \Gamma) \bullet \Gamma' = \int_a^b F_1(\gamma(t); f(\gamma(t)))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t); f(\gamma(t)))\gamma_2'(t) + \\ &\qquad + F_3(\gamma(t); f(\gamma(t))) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t); f(\gamma(t))) + F_3(\gamma(t); f(\gamma(t))) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \right) \gamma_1'(t) + \\ &\qquad + \left(F_2(\gamma(t); f(\gamma(t))) + F_3(\gamma(t); f(\gamma(t))) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \right) \gamma_2'(t)\, dt.\end{aligned}$$
Ponendo
$$\begin{cases} G_1(x,y) := F_1(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ G_2(x,y) := F_2(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$
e ricordando il Teorema 7 (Green), otteniamo
$$\int_{\partial \overline{S}} F = \int_a^b (G \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_{\partial C} G = \int_C \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right). \tag{22}$$
D'altra parte, parametrizzando S con
$$\varphi : C \to \mathbf{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$$
e osservando che
$$(N \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$
attraverso un semplice conto basato sulla definizione di rotore (e lasciato per esercizio), si ottiene che
$$\int_{\overline{S}} \mathrm{rot}\ F = \int_C \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right).$$
La conclusione segue ora immediatamente da (22). □

Lezione del 20/10/03 (2 ore)

Definizione 19. *Sia A sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$ e consideriamo un campo continuo $F : A \to \mathbf{R}^n$. Allora ogni funzione $\varphi \in C^1(A)$ tale che $\nabla \varphi \equiv F$ è detta potenziale di F.*

OSSERVAZIONE: Capita sovente che il campo F non abbia nemmeno un potenziale. Infatti l'esistenza di un potenziale "restringe alquanto la libertà di scelta del campo", affermazione resa precisa dalla sottostante Proposizione 15. Tale proposizione consente, in particolare, di produrre immediatamente esempi di campo senza potenziale, e.g. $F(x,y) := (0,x)$.

OSSERVAZIONE: Da un potenziale di F se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con φ il potenziale dato e con A_j ($j = 1, \dots$) le componenti connesse di A, allora ogni funzione così definita
$$\psi(x) := \varphi(x) + c_j, \qquad \text{se } x \in A_j \tag{23}$$

($c_j \in \mathbf{R}$) è un potenziale di F. Anzi, è facile convincersi anche del viceversa e cioè che ogni potenziale di F è della forma (23). Una dimostrazione rigorosa di quest'ultima affermazione segue subito dal seguente risultato (intuitivamente scontato).

Proposizione 14. *Se A è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbf{R}^n$ e se f è una funzione differenziabile in A con $\nabla f \equiv 0$, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $P_0 \in A$ e definiamo

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{P \in A \,|\, f(P) = f(P_0)\} \qquad (\neq \emptyset, \text{ in quanto } P_0 \in A_1) \\ A_2 &:= \{P \in A \,|\, f(P) \neq f(P_0)\} = A \backslash A_1. \end{aligned}$$

La conclusione seguirà una volta dimostrato che

$$A_1 \text{ e } A_2 \text{ sono entrambi aperti.} \tag{24}$$

Infatti da questo e dal fatto che A è connesso si deduce subito che $A_2 = \emptyset$. Ciò significa che $f(P) = f(P_0)$, per ogni $P \in A$.

Dimostriamo dunque (24). La continuità di f implica subito che A_2 è aperto. Per provare che anche A_1 lo è, consideriamo $P \in A_1$ e un disco D centrato in P tale che $D \subset A$. Allora, per ogni $Q \in D$, si ha

$$\begin{aligned} f(Q) - f(P_0) &= f(Q) - f(P) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(P + t(Q-P))dt \\ &= \int_0^1 \nabla f(P + t(Q-P)) \bullet (Q-P)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $D \subset A_1$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di $P \in A_1$. $\square$

OSSERVAZIONE: D'ora in poi ci occuperemo di campi $F : A \to \mathbf{R}^n$ (A aperto in $\mathbf{R}^n$) di classe C^1. Ogni potenziale di F sarà dunque di classe C^2.

Definizione 20. *Diremo che F soddisfa la* <u>*condizione delle derivate incrociate*</u> *(CDI) se vale l'uguaglianza*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \textit{(nel caso che sia } n = 2\textit{)}$$

oppure

$$\text{rot } F \equiv 0 \qquad \textit{(nel caso che sia } n = 3\textit{)}.$$

Proposizione 15. *Se esiste un potenziale φ di F, allora*

(i) *Il campo F soddisfa la CDI;*
(ii) *Se $\gamma : [a, b] \to A$ è una curva regolare a tratti con $\|\gamma'\|$ limitata, allora si ha*

$$\int_a^b (F \circ \gamma) \bullet \gamma' = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

DIMOSTRAZIONE: (i) È una facile conseguenza del teorema di Schwartz. Infatti, limitandosi a considerare il caso $n = 2$, si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Lo stesso argomento funziona anche nel caso $n = 3$ (lasciato per esercizio).

(ii) Si ha infatti

$$\int_{\overline{C}} F = \int_a^b (F \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_a^b (\nabla\varphi \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_a^b \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}$$

da cui segue la conclusione. □

OSSERVAZIONE: Il fatto che F soddisfi la CDI non è sufficiente, in generale, a garantire l'esistenza di un potenziale. Lo capiremo subito attraverso un esempio che riusciremo presto ad interpretare come "rivelatore particolare" di un fenomeno generale. Sia F il campo così definito

$$A := \mathbf{R}^2 \backslash (0,0), \qquad F(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

che soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. Mostreremo ora come supporre l'esistenza di un potenziale di F conduca ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo la parametrizzazione del cerchio unitario percorso in senso antiorario

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

troviamo

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \bullet (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi. \tag{25}$$

D'altra parte, se esistesse un potenziale φ di F, si avrebbe anche

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt = \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = 0$$

per (ii) in Proposizione 15.

Prima di dare la definizione di "campo conservativo", osserviamo che vale il seguente risultato.

Proposizione 16. *Queste due affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(i) *Vale*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per ogni curva $\overline{C}$ che sia C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione, con C chiusa e contenuta in A;

(ii) *Per ogni coppia ordinata (P, Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di A e per ogni curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset A$, l'integrale*

$$\int_{\overline{C}} F$$

dipende solo da (P, Q).

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che (i) implica (ii). Presi P, Q in una medesima componente connessa di A, siano $\overline{C_1}$ e $\overline{C_2}$ due curve regolari a tratti orientate che congiungono P (punto iniziale) a Q, con $C_1, C_2 \subset A$. Applicando (i) a $\overline{C} := \overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})$, otteniamo

$$0 = \int_{\overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})} F = \int_{\overline{C_1}} F - \int_{\overline{C_2}} F$$

e cioè quanto volevamo provare.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Consideriamo una curva regolare a tratti orientata e chiusa $\overline{C}$, con $C \subset A$. Preso $P_0 \in C$, indichiamo con $\overline{C_1}$ la curva banale costituita dal solo P_0 e applichiamo (ii) con $P = Q = P_0$. Otteniamo

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C_1}} F = 0.$$

□

Definizione 21. *Il campo F si dice* <u>*conservativo*</u> *(in A) se*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per ogni curva $\overline{C}$ che sia C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione, con C chiusa e contenuta in A (oppure, equivalentemente, se vale la "condizione di indipendenza dal percorso" (ii) in Proposizione 16).

Ora, come corollario di (ii) in Proposizione 15, otteniamo immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 17. *Se F ha un potenziale, allora F è conservativo.*

Dimostriamo infine il seguente risultato che ci verrà utile in seguito.

Proposizione 18. *Sia A un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbf{R}^n$. Allora considerata una qualsiasi coppia di punti in A esiste una curva C^1 a tratti e adatta all'integrazione, tutta contenuta in A, che li congiunge (il che si esprime dicendo che A è* <u>*connesso per archi adatti all'integrazione*</u>*).*

DIMOSTRAZIONE: Basterà verificare che per ogni $P \in A$ l'insieme Γ_P dei punti Q per i quali esiste una curva C^1 a tratti e adatta all'integrazione, tutta contenuta in A e congiungente P a Q, coincide con l'insieme A. Poiché A è connesso e Γ_P è non vuoto, sarà sufficiente dimostrare che gli insiemi Γ_P e $A \backslash \Gamma_P$ sono entrambi aperti, per concludere che allora si ha proprio $\Gamma_P = A$.

A questo scopo, consideriamo un disco $D \subset A$ e osserviamo che in D esiste un punto congiungibile a P mediante una curva C^1 a tratti e adatta all'integrazione, tutta contenuta in A, se e solo se ogni punto di D è congiungibile a P mediante una curva C^1 a tratti e adatta all'integrazione, tutta contenuta in A. Quindi si possono verificare soltanto le seguenti due situazioni:

> *Ogni punto di D è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $D \subset \Gamma_P$;*

oppure

> *nessun punto di D è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $D \subset A \backslash \Gamma_P$.*

Ciò significa, per l'appunto, che Γ_P e $A \backslash \Gamma_P$ sono entrambi aperti. □

Lezione del 25/10/04 (2 ore)

Dimostriamo ora il viceversa del risultato stabilito in Proposizione 17.

Proposizione 19. *Se F è conservativo, allora F ha un potenziale. Più precisamente siano A_j ($j = 1, \dots$) le componenti connesse di A, si consideri $P_j \in A_j$ e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{C}} F \qquad (\textit{se } P \in A_j)$$

dove $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata, con $C \subset A_j$, congiungente P_j (punto iniziale) a P. Allora φ è un potenziale di F (quello che si annulla nei P_j).

<u>Nota bene:</u> *una siffatta curva $\overline{C}$ esiste, quale che sia P, grazie a Proposizione 18. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di $\overline{C}$, per Proposizione 16. La funzione φ risulta pertanto ben definita.*

DIMOSTRAZIONE: Senza compromettere la generalità dell'argomento dimostrativo, possiamo supporre A connesso e $n = 2$. Fissato $P_0 \in A$, poniamo

$$\varphi(P) := \int_{\overline{C}} F, \qquad P \in A$$

dove $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata, con $C \subset A$, congiungente P_0 (punto iniziale) a P. Dimostreremo che $\nabla\varphi \equiv F$.

Si consideri dunque $P \in A$ e sia $\overline{C}$ una curva come sopra. Poiché A è aperto, esisterà $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(P) \subset A$. Se indichiamo con $\overline{\Sigma_h}$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, il segmento orientato congiungente P a $P + h(1, 0)$, parametrizzato da

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2, \qquad t \mapsto P + th(1, 0),$$

si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(P + h(1, 0)) - \varphi(P)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\overline{C \cup \Sigma_h}} F - \int_{\overline{C}} F\right) = \frac{1}{h}\int_{\overline{\Sigma_h}} F \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 (F \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_0^1 F_1(P + th(1, 0))dt \\
&= F_1(P) + \int_0^1 F_1(P + th(1, 0)) - F_1(P)dt.
\end{aligned}$$

Dalla continuità di F_1 in P segue che esiste $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P)$ e che si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = F_1(P).$$

Analogamente si prova che esiste $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P)$ e che si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = F_2(P)$. $\square$

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali la prima implicazione di Proposizione 15 si può invertire.

Definizione 22. *L'insieme A si dice <u>stellato rispetto a P_0</u> ($P_0 \in A$) se il segmento*

$$P_0P := \{P_0 + t(P - P_0) \,|\, t \in [0, 1]\}$$

è contenuto in A per ogni $P \in A$.

OSSERVAZIONE: Valgono i seguenti fatti.

- Se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi
$$\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \qquad \mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$$
sono connessi e non stellati;
- Se A è convesso, allora A è stellato rispetto ad ogni suo punto (e viceversa);
- Si prova, e si intuisce facilmente, che se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. E.g. l'insieme connesso e non stellato $\mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso.

Esempi di insiemi stellati, non stellati, semplicemente connessi.

Proposizione 20. *Se F soddisfa la CDI e se ogni componente connessa A_j di A è un insieme stellato rispetto a $P_j \in A_j$, allora F ha potenziale. In particolare, il potenziale che si annulla nei P_j è dato da*
$$\varphi(P) := \int_{\overline{P_j P}} F \qquad (\text{se } P \in A_j)$$
dove l'orientazione del segmento è scelta di modo che P_j sia il punto iniziale.

DIMOSTRAZIONE: Senza intaccare la generalità della dimostrazione, possiamo supporre A stellato rispetto a $P_0 \in A$ e $n = 2$. Consideriamo $P \in A$ e dimostriamo che esiste $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P)$ e che
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = F_1(P).$$

Poiché A è aperto, esisterà $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(P) \subset A$. Osserviamo che se $|h| < \varepsilon$ allora il triangolo chiuso T_h di vertici
$$P_0, \quad P, \quad Q := P + h(1,0)$$
è contenuto in A, in quanto A è stellato rispetto a P_0. Dal Teorema 7 di Green (useremmo invece il Teorema 8 di Stokes se stessimo supponendo $n = 3$) otteniamo allora che
$$\int_{\overline{P_0 Q}} F + \int_{-\overline{\Sigma_h}} F + \int_{-\overline{P_0 P}} F = \int_{\overline{\partial T_h}} F = \int_{T_h} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$
dove $\overline{\Sigma_h}$ è definito esattamente come nella dimostrazione di Proposizione 19. Segue che
$$\begin{aligned} \varphi(P + h(1,0)) &= \varphi(Q) = \int_{\overline{P_0 Q}} F = \int_{\overline{P_0 P}} F + \int_{\overline{\Sigma_h}} F \\ &= \varphi(P) + \int_{\overline{\Sigma_h}} F \end{aligned}$$
e quindi
$$\frac{\varphi(P + h(1,0)) - \varphi(P)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\overline{\Sigma_h}} F.$$
Si procede ora come nella dimostrazione di Proposizione 19. $\square$

OSSERVAZIONE: La Proposizione 20 può essere estesa al caso di A semplicemente connesso.

Esempi.

Lezione del 26/10/04 (2 ore)

Esempi ed esercizi su campi conservativi.

Richiami su numeri complessi, funzioni complesse, limiti di funzioni complesse. Notazioni canoniche: $z = (x, y) = x + iy$ (per i punti), $f = (u, v) = u + iv$ (per le funzioni). D'ora in poi Ω denoterà un sottoinsieme aperto di $\mathbf{C}$ ed f una funzione a valori complessi definita e continua in Ω.

Definizione 23. *La funzione f si dice derivabile (o anche olomorfa) in $z_0 \in \Omega$ se esiste il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

indicato in tal caso con $f'(z_0)$. Se f è derivabile in tutti i punti di Ω, si dice che f è derivabile (oppure olomorfa) in Ω.

Nel seguente risultato e nel seguito R indica l'operatore di rotazione di $\pi/2$ (in senso antiorario) nel piano, ossia

$$R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto R(x, y) := (-y, x).$$

Teorema 9. *Data $f = (u, v) : \Omega \to \mathbf{C}$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *La funzione f è derivabile in z_0;*
(ii) *Le funzioni u, v sono differenziabili in z_0 e vale*

$$\nabla v(z_0) = R\nabla u(z_0)$$

detta condizione di Cauchy-Riemann (CCR) in z_0.

Inoltre, se f è derivabile in z_0, si ha

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$$

(da questa e dalla CCR si ottengono poi, ovviamente, altre uguaglianze equivalenti, e.g. $f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$).

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo prima di tutto che f è derivabile in z_0 se e solo se esistono

$$w = a + ib \in \mathbf{C}, \qquad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z))$$

con

$$\sigma_1(z) = o(|z - z_0|), \qquad \sigma_2(z) = o(|z - z_0|)$$

tali che

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + \sigma(z).$$

Osserviamo che quest'ultima uguaglianza equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} u(z) = u(z_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \sigma_1(z) \\ v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \sigma_2(z). \end{cases} \tag{26}$$

Segue pertanto che

- Se f è derivabile in z_0, allora vale (26) con $a + ib = f'(z_0)$. Questo implica che u e v sono differenziabili (e quindi derivabili parzialmente) in z_0 e che si ha
$$\nabla u(z_0) = (a, -b), \qquad \nabla v(z_0) = (b, a)$$
da cui segue subito la CCR.
- Viceversa, se u e v sono differenziabili in z_0 e se inoltre vale la CCR, allora il sistema (26) è soddisfatto con
$$a := u_x(z_0), \qquad b := v_x(z_0).$$
Di conseguenza f è derivabile in z_0 e si ha $f'(z_0) = w = a + ib = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

□

Lezione del 27/10/04 (2 + 2 ore)

Dal Teorema del differenziale totale (dimostrato nel corso di Analisi III) segue immediatamente il seguente corollario.

Proposizione 21. *Siano u e v derivabili parzialmente in un intorno di $z_0 \in \Omega$. Supponiamo inoltre che i gradienti ∇u e ∇v siano continui in z_0 e che sia verificata la CCR in z_0. Allora f è derivabile in z_0 e si ha*
$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

Inoltre, come per le funzioni reali, vale questo risultato.

Proposizione 22. *Se f è derivabile in $z_0 \in \Omega$, allora f è continua in z_0.*

DIMOSTRAZIONE: Analogamente al caso di una funzione reale, la tesi segue subito osservando che
$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$
per ogni $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. □

Teorema 10. *Le seguenti affermazioni, relative a $f = u + iv : \Omega \to \mathbf{C}$, sono equivalenti:*

(i) *la funzione f è derivabile in Ω;*
(ii) *la funzione f è derivabile infinite volte in Ω;*
(iii) *si ha $u, v \in C^\infty(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR;*
(iv) *si ha $u, v \in C^1(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR.*

DIMOSTRAZIONE: Che (i) implichi (ii) segue subito dalla formula di rappresentazione di Cauchy, di cui tratteremo in seguito (Teorema 12).

Assumiamo (ii) e dimostriamo (iii). A questo scopo, osserviamo che se fissiamo arbitrariamente un intero $n \geq 1$, allora esistono le derivate parziali
$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Inoltre queste sono differenziabili in Ω, valgono le CCR

$$\nabla\left(\frac{\partial^{j-1}v}{\partial x^{j-1}}\right) = R\,\nabla\left(\frac{\partial^{j-1}v}{\partial x^{j-1}}\right) \qquad (j=1,\dots,n) \tag{27}$$

e si ha

$$f^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + i\frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j=1,\dots,n) \tag{28}$$

per Teorema 9. Tutto questo implica facilmente che $u, v \in C^n(\Omega)$. Per esempio:

- Se $n = 1$ le funzioni u_x e v_x sono continue, per (28) e Proposizione 22. A questo punto anche le derivate u_y e v_y sono continue, per (27). Quindi $u, v \in C^1(\Omega)$.
- Analogamente, se $n = 2$ le derivate u_{xx} e v_{xx} sono continue (per (28) e Proposizione 22). La continuità di tutte le altre derivate parziali seconde segue subito dal set (27) di CCR.

Infine (iii) implica (iv) banalmente, mentre (iv) implica (i) per il Teorema 9. □

Definizione 24. *Una funzione $u : \Omega \to \mathbf{R}$ si dice armonica (in Ω) se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \equiv 0$.*

Proposizione 23. *Se $f = u + iv$ è derivabile in Ω, allora u e v sono armoniche in Ω.*

DIMOSTRAZIONE: Le funzioni u e v sono di classe C^2 e vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u, \text{ i.e. } \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

per Teorema 10. Ricordando anche il Teorema di Schwartz, si ottiene allora

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

da cui $\Delta u \equiv 0$. Analogamente si prova che $\Delta v \equiv 0$. □

Proposizione 24. *Supponiamo che le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati (oppure, più debolmente, semplicemente connessi) e consideriamo una funzione u armonica in Ω. Allora esiste una funzione v, armonica in Ω (detta coniugata di u) tale che $u + iv$ è derivabile in Ω. Essa è un potenziale del campo $R\nabla u$.*

DIMOSTRAZIONE: la prova è (più che) suggerita nell'enunciato stesso. Infatti, per il Teorema 9, se v esiste deve soddisfare la CCR, i.e $\nabla v = R\nabla u$. Ma una tale v esiste di sicuro, grazie alla Proposizione 20 e osservando che il campo $R\nabla u$, essendo u armonica, soddisfa la CDI. □

Come facile conseguenza di Proposizione 24 e di Teorema **??**, si ha il seguente risultato.

Corollario 11. *Se u è armonica in Ω, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia D un disco qualsiasi incluso in Ω. Allora, per Proposizione 24, esiste v armonica in D tale che $u + iv$ è derivabile in D. Il Teorema 10 implica allora che u è di classe C^∞ in D. La conclusione segue, ovviamente, dall'arbitrarietà di D. □

Prima di enunciare e dimostrare il prossimo risultato(corrispondente, in un certo senso, alla Proposizione 15), definiamo l'integrale di una funzione complessa.

Definizione 25. *Sia f continua in Ω e sia $\overline{C}$ una curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione, con $C \subset \Omega$. Definiamo allora*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz := \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds$$

Coerenza con le "regole formali" della notazione di Leibniz.

Il seguente facile risultato è spesso utile nel calcolo esplicito di integrali.

Proposizione 25. *Nelle ipotesi di Definizione 25, sia $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una parametrizzazione di $\overline{C}$ compatibile con l'orientazione. Allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

dove il prodotto nell'integrando del secondo membro è quello complesso e dove si sottintende la seguente definizione di integrale di $\alpha + i\beta : [a, b] \to \mathbf{C}$ (con α e β continue)

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t))dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i \int_a^b \beta(t)dt.$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) \left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) + i \left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt + i \int_a^b \left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \bullet \gamma'(t)dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \bullet \gamma'(t)dt \\
&= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds.
\end{aligned}$$

□

Proveremo ora un risultato che corrisponde, nel contesto dei campi, a Proposizione 15.

Proposizione 26. *Se esiste una primitiva F di f (in Ω), allora*

(i) *La funzione f è derivabile in Ω (i.e. $u, v \in C^1(\Omega)$ e vale la CCR, per Teorema 10);*
(ii) *Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva regolare a tratti con $\|\gamma'\|$ limitata, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

dove $\overline{C}$ è l'immagine di γ (quest'ultima compatibile con l'orientazione).

DIMOSTRAZIONE: (i) Poiché F è derivabile, il Teorema 10 implica che anche $F' = f$ è derivabile.

(ii) Sia $F = U + iV$. Allora $U, V \in C^\infty(\Omega)$, vale la CCR

$$\nabla V = R\nabla U, \text{ i.e. } \begin{cases} V_x = -U_y \\ V_y = U_x \end{cases}$$

e

$$u + iv = U_x + iV_x$$

per Teorema 9 e Teorema 10. Segue che U è un potenziale del campo $(u, -v)$ e che V è un potenziale del campo (v, u). Dalla (ii) di Proposizione 15, otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int_{\overline{C}} f(z)dz &= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds \\ &= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) + i\,(V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE: (Confrontare con l'osservazione che segue la Proposizione 15). La derivabilità di f non implica, in generale, che esista una primitiva di f. Per esempio, la funzione

$$f(z) := \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega := \mathbf{C}\backslash\{0\}$$

è derivabile in Ω ma, come stiamo per verificare, non è dotata di primitive in Ω. Infatti si vede subito che

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

sicché l'uguaglianza (25), incontrata nell'ambito della teoria del potenziale, si può riscrivere

$$\int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds = 2\pi$$

dove $\overline{C}$ indica il circolo parametrizzato da $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Quindi

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds \neq 0$$

mentre, se esistesse una primitiva F di f, si dovrebbe avere

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0$$

per (ii) di Proposizione 26. □

Esempi ed esercizi.

Lezione del 2/11/04 (2 ore)

Proposizione 27. *Supponiamo che f sia continua e che l'integrale $\int_{\overline{C}} f(z)dz$ dipenda solo dall'orientazione e dai punti estremi di $\overline{C}$ (dove, come al solito, $\overline{C}$ è una curva C^1 a tratti orientata e adatta all'integrazione, con $C \subset \Omega$). Allora:*

(i) *I campi $(u, -v)$ e (v, u) sono conservativi;*

(ii) *Se U e V sono due potenziali qualsiasi di $(u,-v)$ e (v,u) rispettivamente (essi esistono e si possono determinare grazie a Proposizione 19), allora la funzione $F := U + iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: (i) Dalla "condizione di indipendenza dal percorso" assunta per ipotesi su

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} (u,-v) \bullet ds + i \int_{\mathcal{C}} (v,u) \bullet ds$$

e da Proposizione 16 segue subito che i campi $(u,-v)$ e (v,u) sono conservativi in Ω.

(ii) Si ha $U, V \in C^1(\Omega)$ e

$$\nabla U = (u,-v), \qquad \nabla V = (v,u)$$

e quindi anche

$$\nabla V = R\nabla U.$$

Allora, per Teorema 9, la funzione F è derivabile in Ω e si ha

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

□

Dimostreremo adesso un risultato che "corrisponde" alla Proposizione 20 della teoria del potenziale. Esso afferma che, proprio sotto le ipotesi supplementari assunte sul dominio in Proposizione 20, la prima implicazione di Proposizione 26 si può invertire.

Proposizione 28. *Supponiamo che la funzione f sia derivabile in Ω (i.e. $u, v \in C^1(\Omega)$ e vale la CCR, per Teorema 10) e che ogni componente connessa di Ω sia un insieme stellato. Allora valgono (i) e (ii) di Proposizione 27.*

DIMOSTRAZIONE: (i) Da Teorema 10 segue che le funzioni u e v sono di classe C^1 in Ω e che vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Questo implica subito che i campi $(u,-v)$ e (v,u) soddisfano la CDI. Quindi, per Proposizione 20 e Proposizione 17, tali campi sono conservativi.

(ii) Come nella dimostrazione di Proposizione 27. □

OSSERVAZIONE: Grazie all'osservazione che segue la dimostrazione di Proposizione 20, la Proposizione 28 si può estendere al caso di insiemi le cui componenti connesse siano semplicemente connesse.

Esempi ed esercizi.

Dimostreremo fra poco la formula di rappresentazione di Cauchy utilizzata per provare l'implicazione principale in Teorema 10. Ci servirà il seguente lemma.

Proposizione 29. *Consideriamo un sottoinsieme aperto E di Ω tale che ∂E sia una curva C^1 a tratti adatta all'integrazione e contenuta in Ω. Allora, se f è derivabile in Ω, si ha*

$$\int_{\partial E} f(z)dz = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Per Teorema 10, i gradienti ∇u e ∇v sono continui e soddisfano la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Allora, dal Teorema 7 di Green, segue che

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} f(z)dz &= \int_{\partial E}(u,-v)\bullet ds + i\int_{\partial E}(v,u)\bullet ds \\ &= \int_E\left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\int_E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Siamo ora pronti per dimostrare la formula di Cauchy.

Teorema 12. *Siano E ed f come in Proposizione 29. Allora, per ogni $w \in E$, si ha*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia D_ε il disco di raggio ε centrato in w. Supporremo ε sufficientemente piccolo, di modo che $D_\varepsilon \subset E$. Poiché $z \mapsto f(z)/(z-w)$ è derivabile in $\Omega\backslash\{w\}$, dalla Proposizione 29 segue che

$$0 = \int_{\partial(E\backslash D_\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz - \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

Parametrizzando ∂D_ε con

$$\gamma(t) := w + \varepsilon e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e ricordando Proposizione 26, si ottiene allora

$$\int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_0^{2\pi}\frac{f(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt$$

per ogni ε sufficientemente piccolo. A questo punto la conclusione segue subito osservando che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt = 2\pi f(w) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)\,dt = 2\pi f(w)$$

per la continuità di f in w. □

Esempi ed esercizi.

Lezione del 3/11/04 (2 ore)

OSSERVAZIONE: Come affermato nella dimostrazione di Teorema 10, dalla formula di Cauchy segue che una funzione derivabile in Ω è derivabile infinite volte in Ω. Vale infatti il seguente facile corollario di Teorema 12.

Proposizione 30. *Siano E ed f come in Proposizione 29. Allora f è derivabile indefinitamente in E e vale la formula*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial E}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \quad w \in E \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Esempi ed esercizi.

References

[1] S. Campanato: Lezioni di Analisi Matematica, 2^a parte. Libreria Scientifica Pellegrini, Pisa.
[2] E. Giusti: Analisi Matematica 2. Bollati Boringhieri.