

**Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)**

7 giugno 2006

1. Sia C l'ellisse ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con il piano di equazione $z = x$. Calcolare

$$\int_C (1 + y^2)^{1/2} ds.$$

2. Sia C il cono con il vertice in $(0, 0, 1)$ e avente come base il disco unitario del piano xy centrato nell'origine. Inoltre, si indichi con S la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Posto $V := C \cup S$ e considerato il campo

$$F(x, y, z) := (x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

si verifichi che vale il Teorema della divergenza

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} F \cdot N$$

dove N è il campo delle normali esterne a V nei suoi punti di frontiera.

3. Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto 2xy + i(x - y + x^2)$$

è derivabile.