

**Prova scritta di  
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)**

7 settembre 2006

1. Siano  $a, b, h$  numeri reali tali che

$$b \geq a > 0, \quad h > 0.$$

Calcolare il volume della "botte ellissoidale"

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, |z| \leq h \right\}$$

al variare di  $h$ .

2. Calcolare

$$\int_{\bar{S} \cup \bar{C}} F$$

dove

- $\bar{S}$  è il segmento orientato avente  $(1, 1, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 0, 0)$  come punto finale;
- $\bar{C}$  è il quarto di circonferenza, nel piano  $x = 1$ , di centro  $(1, 1, 0)$  e orientato in modo tale che  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- $F$  è il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left( -\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 1 \right).$$

3. Determinare:

- il dominio di esistenza  $D$  della funzione

$$(x, y) \mapsto f(x, y) := \ln \left( \frac{x}{y} \right) + ixy;$$

- i punti di  $D$  in cui  $f$  è derivabile.