Anno Accademico 2007-2008

DIARIO DEL CORSO SSIS
Didattica della matematica per la scuola superiore 1

SILVANO DELLADIO

9 ottobre 2007

Costruzione di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, dando per scontato $\mathbb{N}$.

Teoria ingenua dei numeri naturali: definizione di numero, addizione e moltiplicazione di numeri, proprietà algebriche.

TEOREMA: Il prodotto (della teoria ingenua) è commutativo.

Rappresentazione posizionale di un numero.

Assiomi di Peano: enunciato, discussione ed esempi di modelli. Enunciato del teorema di isomorfismo.

16 ottobre 2007

Dimostrazione del teorema di isomorfismo.

Definizione di somma di numeri naturali e proprietà fondamentali. L'elemento 0 è neutro per la somma. Ordinamento dei numeri naturali. Accenni alle definizione di prodotto di numeri naturali e alle proprietà fondamentali. L'elemento $1 := \sigma(0)$ è neutro per il prodotto. Esempi di dimostrazioni di fatti che risultano ovvi nella "teoria naive" dei numeri interi:

(i) Non esistono numeri naturali che precedono 0;
(ii) Lo 0 l'unico numero naturale che precede 1.

Il teorema dell' induzione. Dimostrazione "topologica" del teorema fondamentale dell'Algebra.

Rotazione di un angolo retto di un vettore. Applicazione: dimostrazione delle formule di addizione per le funzioni seno e coseno.

TEOREMA (di Pitagora): un triangolo è rettangolo se e soltanto se vale l' identità pitagorica.

PROPOSIZIONE: due dati vettori u e v sono fra loro ortogonali se e solo se $F(u, v) := u_1v_1 + u_2v_2 = 0$.

Proprietà della funzione F:

(1) $F(u + v, w) = F(u, w) + F(v, w)$;

Date: November 13, 2007.

(2) $F(cu, v) = cF(u, v)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$;
(3) $F(u, v) = F(v, u)$ e quindi anche $F(w, u + v) = F(w, u) + F(w, v)$;
(4) $F(u, u) = \|u\|^2$.

Notazione: $u \bullet v := F(u, v)$ (prodotto scalare). Questa notazione è importante in quanto, evocando il prodotto dei numeri, agevola l'implementazione delle proprietà (1-4).

OSSERVAZIONE: $u \bullet v = 0$ non implica $u = 0$ oppure $v = 0$ (e.g. in $\mathbf{R}^2$, $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$).

23 ottobre 2007

PROPOSIZIONE: $u \bullet v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$ (θ è l'angolo compreso fra u e v).

Teoria analitica della retta. Esempi: condizione di parallelismo, condizione di ortogonalità, distanza di un punto da una retta. L'area di un triangolo, che si ricava immediatamente dal seguente risultato.

PROPOSIZIONE: $\mathrm{area}(\mathbb{P}(u, v)) = |v \bullet Ru|$.

Applicazione alla dimostrazione della formula della distanza punto-retta.

Esercizi e applicazioni di geometria analitica 2D. Confronto con i metodi risolutivi tradizionali.

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione vettoriale del problema, interpretazione e risoluzione grafica. Il metodo di Cramer: dimostrazione algebrica e dimostrazione geometrica.

30 ottobre 2007

Definizione di determinante: $\det[u|v] := v \bullet Ru$.

Risoluzione grafica delle equazioni trigonometriche lineari.

Sezioni coniche. Costruzione di Dandelin per l'ellisse.

Sia Γ il cono di apertura $\pi/2$ e con vertice in u. Allora P appartiene a Γ se e solo se

$$\|u - P\|^2 = 2|(u - P) \bullet u|^2.$$

Senza rimetterci nulla (in termini di generalità dell'argomento dimostrativo), possiamo supporre

$$u = (0, \cos\theta, \sin\theta).$$

Ora se $P = (x, y, 0)$ si ha

$$u - P = (-x, \cos\theta - y, \sin\theta), \qquad (u - P) \bullet u = 1 - y\cos\theta$$

e quindi i punti $P = (x, y, 0)$ nell'intersezione di Γ col piano $z = 0$ soddisfano

$$x^2 - y^2\cos(2\theta) + 2y\cos\theta = 1$$

che possiamo ovviamente interpretare come l'equazione di una curva nel piano xy. Indicando tale curva con γ_θ, ne segue che:

(i) $\gamma_{\pi/2}$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$;

(ii) $\gamma_{\pi/4}$ è la parabola $y = 2^{1/2} - 2^{1/2}x^2$;
(iii) se $\theta \in (0, \pi/4)$, allora $\cos(2\theta) > 0$ e γ_θ è un'iperbole;
(iv) se $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$, allora $\cos(2\theta) < 0$ e γ_θ è un'ellisse.

Sia M una matrice 2×2, $v \in \mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$ e indichiamo con Γ la curva piana di equazione
$$MP \bullet P + v \bullet P = c, \qquad P = (x, y).$$
Senza perdere in generalità, d'ora in poi si può supporre che M sia simmetrica. Vale la seguente

PROPOSIZIONE: Il vettore $2MP + v$ è ortogonale a Γ in P.

Questo segue immediatamente dal fatto che Γ è una curva di livello per la funzione
$$P \mapsto f(P) := MP \bullet P + v \bullet P$$
e che $\nabla f(P) = 2MP+v$. Una dimostrazione alternativa ed elementare è la seguente. Siano $P, Q \in \Gamma$, per cui
$$MP \bullet P + v \bullet P = MQ \bullet Q + v \bullet Q = c.$$
Ricordando che M è simmetrica, si ottiene
$$\begin{aligned} 0 &= MP \bullet P + v \bullet P - MQ \bullet Q - v \bullet Q \\ &= MP \bullet P - MP \bullet Q + MP \bullet Q - MQ \bullet Q + v \bullet (P - Q) \\ &= MP \bullet (P - Q) + MQ \bullet (P - Q) + v \bullet (P - Q) \\ &= (MP + MQ + v) \bullet (P - Q). \end{aligned}$$
A questo punto si conclude dividendo per $\|P - Q\|$ e facendo tendere Q a P.
CVD

OSSERVAZIONE: che la precedente Proposizione contempla anche il caso della retta, corrispondente alla scelta di M matrice nulla.
OSSERVAZIONE: la Proposizione precedente è una conseguenza immediata del seguente fatto, ben noto dai corsi di calcolo differenziale: se f è una funzione di classe C^1 in un aperto A del piano e se $\nabla f(P_0) \neq 0$ ($P_0 \in A$), allora:

- in un intorno di P_0, l'insieme di livello
$$\mathcal{C} := \{P \in A \,|\, f(P) = f(P_0)\}$$
è una curva di classe C^1;
- il vettore $\nabla f(P_0)$ è ortogonale alla curva di livello $\mathcal{C}$ in P_0.

Applicazione a casi specifici di coniche (rette tangenti, normali).

6 novembre 2007

Matrici come operatori sui vettori. Se α, β sono i vettori riga e u, v i vettori colonna di una matrice M, si definisce
$$MP = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{bmatrix} P := (\alpha \bullet P, \beta \bullet P), \qquad P = (x, y)$$
che equivale a
$$MP = \big[u | v\big] P := xu + yv, \qquad P = (x, y).$$
Proprietà:

(i) $P \mapsto MP$ è lineare;
(ii) la matrice identità così definita
$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
verifica l'uguaglianza
$$IP = P$$
per ogni P.

Algebra delle matrici.Se
$$M = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{bmatrix}, \qquad N = [u|v]$$
allora si ha
$$\begin{aligned} (M \circ N)P &= M(NP) = M(xu + yv) = xMu + yMv \\ &= x(\alpha \bullet u, \beta \bullet u) + y(\alpha \bullet v, \beta \bullet v) \\ &= \big((\alpha \bullet u)x + (\alpha \bullet v)y, (\beta \bullet u)x + (\beta \bullet v)y\big) \end{aligned}$$
cioè
$$(M \circ N)P = \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix} P.$$
Sulla base di questo risultato, sembra ora naturale definire la matrice "prodotto" $M \times N$ come segue
$$M \times N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{bmatrix} \times [u \,|\, v] := \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix}.$$
sicché
$$M(NP) = (M \times N)P \tag{0.1}$$
per ogni P.

Proprietà del prodotto fra matrici:
(i) $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$;
(ii) il prodotto di matrici non è commutativo (in generale);
(iii) $M \times I = I \times M = M$;
(iv) se $\det M \neq 0$ si può trovare una (ed una sola) matrice N tale che
$$N \times M = I. \tag{0.2}$$
Per provarlo, consideriamo la rappresentazione di M per colonne
$$M = [u \,|\, v]$$
e cerchiamo
$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{bmatrix}$$
tale che
$$N \times M = \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ossia
$$\alpha \bullet v = \beta \bullet u = 0, \qquad \alpha \bullet u = \beta \bullet v = 1.$$
La prima uguaglianza sarà verificata se (e solo se)
$$\alpha = c_1 Rv, \qquad \beta = c_2 Ru \qquad (c_i \in \mathbf{R}).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché valga la seconda uguaglianza è allora che si abbia

$$c_1 Rv \bullet u = c_2 Ru \bullet v = 1$$

che equivale a

$$-c_1 \det M = c_2 \det M = 1.$$

Concludendo: la matrice

$$N = \begin{bmatrix} -Rv/\det M \\ \hline Ru/\det M \end{bmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} -Rv \\ \hline Ru \end{bmatrix}$$

soddisfa l'uguaglianza (0.2).

(vi) La matrice N del punto (v) commuta nel prodotto con M. Essa è quindi detta "matrice inversa di M" ed è indicata con la notazione M^{-1}. Riepilogando: se $\det M \neq 0$, allora la matrice

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -Rv/\det M \\ \hline Ru/\det M \end{bmatrix}$$

soddisfa le uguaglianze

$$M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I$$

ed è l'unica a godere di questa proprietà.

Applicazione: risoluzione di un sistema lineare. Sia

$$MP = P_0$$

un sistema lineare dato in notazione matriciale e supponiamo che $\det M \neq 0$. Allora esso equivale a

$$M^{-1}(MP) = M^{-1}P_0$$

cioè

$$P = M^{-1}P_0$$

per (0.1) e (vi).
Esempi.
Esame di manuali scolastici contenenti esposizioni approfondite di argomenti dell'algebra lineare (quali spazi vettoriali, trasformazioni lineari e affini, prodotto scalare) e applicazioni. Confronto dell'approccio proposto a lezione con quello contenuto nei manuali, in particolare in relazione all'interpretabilità delle "formule", in ognuno di questi approcci.

L'esempio delle similitudini. Approccio attraverso l'algebra lineare.

(i) DEFINIZIONE: Una trasformazione affine

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad P \mapsto MP + P_0$$

(M matrice, P_0 vettore traslazione) è detta "similitudine" se esiste $c > 0$ tale che

$$\|TP - TQ\| = c\|P - Q\|$$

per ogni $P, Q \in \mathbf{R}^2$. Tale uguaglianza equivale ovviamente alla seguente

$$\|MP\| = c\|P\| \tag{0.3}$$

per ogni $P \in \mathbf{R}^2$. Il numero c è detto "rapporto di similitudine".

(ii) OSSERVAZIONE: Una similitudine trasforma segmenti in segmenti. Infatti, se T è come in (i) e $P, Q \in \mathbf{R}^2$, allora si ha:

$$T(P + t(Q - P)) = P_0 + MP + t(MQ - MP) = TP + t(TQ - TP)$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Quindi il segmento PQ è trasformato da T nel segmento $T(P)T(Q)$.

(iii) PROPOSIZIONE: Se T è una similitudine, con rapporto di similitudine c, allora

$$\|Me_1\| = \|Me_2\| = c, \qquad Me_1 \bullet Me_2 = 0 \tag{0.4}$$

dove $e_1 := (1, 0)$ e $e_2 := (0, 1)$. Infatti (sorvolando sulla prima uguaglianza che è ovvia, per (0.3)) si ha

$$\begin{aligned} Me_1 \bullet Me_2 &= \frac{\|Me_1 + Me_2\|^2 - \|Me_1\|^2 - \|Me_2\|^2}{2} \\ &= \frac{\|M(e_1 + e_2)\|^2 - 2c^2}{2} \\ &= \frac{c^2(\|e_1 + e_2\|^2 - 2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

per (0.3).

(iv) OSSERVAZIONE: Lo stesso argomento usato in (iii) serve a provare che una similitudine "conserva gli angoli".

(v) PROPOSIZIONE (viceversa di (iii)): Se $T : P \mapsto MP + P_0$ è una trasformazione affine e valgono le (0.4), allora T è una similitudine con rapporto di similitudine c. Infatti, se $P = (x, y) = xe_1 + ye_1 \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$\|MP\|^2 = \|xMe_1 + yMe_2\|^2 = c^2(x^2 + y^2) = c^2\|P\|^2$$

ossia (0.3).

(vi) Relazione fra il rapporto di similitudine e $\det M$. Dalle uguaglianze (0.4) e ricordando la formula per l'area del parallelogramma dimostrata il 25 ottbre, si ottiene

$$|\det M| = \text{area}(\mathbb{P}(Me_1, Me_2)) = \|Me_1\|\,\|Me_2\| = c^2$$

e cioè

$$c = |\det M|^{1/2}.$$

13 novembre 2007

Trattazione delle similitudini in un manuale scolastico. Confronto con la trattazione presentata nella precedente lezione.
Esercizi di riepilogo.