

**Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)**

4 giugno 2009

1. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x, y, z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semisfera

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Si calcoli

$$\int_E \operatorname{div} F.$$

Usando tale risultato e il teorema della divergenza, ricavare poi

$$\int_{\partial E} (x^2 + y^2 + z^3) d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

dove N indica il campo normale esterno a ∂E .

2. Sia C la semicirconferenza orientata nel quadrante piano

$$\{(0, y, z) \mid y \geq 0, z \geq 0\}$$

avente l'origine come punto iniziale e $(0, 0, 2)$ come punto finale. Calcolare

$$\int_C F$$

dove F è il campo vettoriale definito nell'esercizio n.1.

3. Calcolare

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{8z + 9i} dz$$

dove C è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.