

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA III - AA 09/10
ANALISI MATEMATICA IV (COMPATTA) - AA 08/09

13 settembre 2010

1. Sia V la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in [0, 1], \sqrt{y} \leq z \leq 2 - y\}.$$

Calcolare

$$\int_V 2z \, dx dy dz.$$

2. Indichiamo con S_1 il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

e con S_2 quello di

$$(x, y) \mapsto 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Calcolare:

- il flusso discendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso S_1 ;
- (usando il Teorema della divergenza e il risultato ottenuto dal primo esercizio) il flusso ascendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso S_2 .

3. Provare che la funzione

$$u(x, y) := \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

è armonica. Determinare poi una funzione armonica coniugata di u .