Analisi Matematica VI (a.a. 2009/10)
DIARIO

Silvano Delladio

Contents

CHAPTER 1

Teoria della misura. Misura esterna.

1. Prima settimana (VII ; 3)
Misura esterna: prime proprietà.

Definizione 1.1. *Una "misura esterna" sull'insieme X è una mappa $\varphi : 2^X \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$;
(ii) $\varphi(E) \leq \varphi(F)$, *se* $E \subset F \subset X$;
(iii) $\varphi(\cup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$, *se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di* X.

Esempio 1.1. $X := \{a, b\}$ e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 1.2. $X \neq \emptyset$ e $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E. \end{cases}$$

Esempio 1.3. $X \neq \emptyset$ e $\varphi(E) := \#(E)$.

Osservazione 1.1. La cosiddetta "misura di Peano-Jordan" non è una misura esterna.

Definizione 1.2. *Un insieme $E \in 2^X$ è detto "misurabile (rispetto alla misura esterna φ su X)" se*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) \tag{1.1}$$

per ogni $A \in 2^X$. La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a φ è indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.2. Grazie a (iii) di Definizione 1.1, la (1.1) si può sostituire con

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c).$$

Esempio 1.4. Negli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X.$$

Teorema 1.1 (***). *Per una misura esterna φ su X, valgono i seguenti fatti:*

(1) $\mathcal{M}_\varphi$ *è c-chiusa;*

(2) *Se $E \in 2^X$ è tale che $\varphi(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}_\varphi$. In particolare $\emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $X \in \mathcal{M}_\varphi$);*
(3) *Se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_\varphi$, allora $\cap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$);*
(4) *Siano $E, F \in \mathcal{M}_\varphi$ con $E \subset F$ e $\varphi(E) < \infty$. Allora $\varphi(F - E) = \varphi(F) - \varphi(E)$;*
(5) *Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, allora $S := \cup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\cap_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$) e inoltre si ha*

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c)$$

per ogni $A \in 2^X$;
(6) *(Additività numerabile) Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, si ha $\varphi(\cup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$.*

Osservazione 1.3. Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo $A_1 := E_1$ e

$$A_n := E_n - \cup_{j=1}^{n-1} E_j = E_n - \cup_{j=1}^{n-1} A_j \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Allora $\{A_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha

$$\cup_{j=1}^n A_j = \cup_{j=1}^n E_j \text{ (per ogni } n), \qquad \cup_j A_j = \cup_j E_j.$$

Definizione 1.3. *Una famiglia non vuota $\Sigma \subset 2^X$ è detta "σ-algebra (in X)" se gode delle seguenti proprietà:*

(i) *Se $E \in \Sigma$, allora $E^c \in \Sigma$;*
(ii) *Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cup_j E_j \in \Sigma$.*

Esempio 1.5. $X := \mathbb{N}$ e $\Sigma := \{E \in 2^X \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$. Allora la famiglia Σ è c-chiusa ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile.

Esempio 1.6. $X := [0, 1]$ e $\Sigma := \{E \in 2^X \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$. In questo caso Σ è una σ-algebra.

Esempio 1.7. Sia X un qualsiasi insieme. Allora 2^X e $\{\emptyset, X\}$ sono entrambe σ-algebre.

Proposizione 1.1 (*). *Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Allora $\cup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$, $\cap_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Pertanto $\mathcal{M}_\varphi$ è una σ-algebra.*

2. Seconda settimana (VIII ; 6)
Misura esterna: continuità, regolarità e approssimazione.

Teorema 2.1 (**). *Se φ è una misura esterna su X, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *(Continuità dal basso) Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha $\varphi(\cup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$.*

(2) *(Continuità dall'alto) Sia* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili, con* $\varphi(E_1) < \infty$. *Allora* $\varphi(\cap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$.
(3) *(Semicontinuità inferiore) Se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili, si ha* $\varphi(\cup_i \cap_{j\geq i} E_j) \leq \liminf_j \varphi(E_j)$.
(4) *(Semicontinuità superiore) Sia* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili tale che* $\varphi(\cup_j E_j) < \infty$. *Allora* $\varphi(\cap_i \cup_{j\geq i} E_j) \geq \limsup_j \varphi(E_j)$.

OSSERVAZIONE 2.1. Se in (2) di Teorema 2.1 non si assume l'ipotesi $\varphi(E_1) < \infty$, la tesi può fallire. Per esempio, se $X := \mathbb{N}$ con $\varphi(E) := \#(E)$, possiamo considerare la famiglia degli $E_j := \{j, j+1, \dots\}$. In tal caso si ha $\cap_j E_j = \emptyset$ e quindi $\varphi(\cap_j E_j) = 0$, mentre $\varphi(E_j) = \infty$ per ogni j.

DEFINIZIONE 2.1. *Una misura esterna su uno spazio metrico* (X, d) *è detta "di Carathéodory" (o anche "metrica") se*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \in 2^X$ *tale che*

$$dist(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0.$$

TEOREMA 2.2 (***). *Sia* φ *una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico* (X, d). *Allora ogni sottoinsieme chiuso di* X *è misurabile.*

OSSERVAZIONE 2.2. Si può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema 2.2: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([**6**, Theorem 1.7]).

PROPOSIZIONE 2.1 (*). *Sia dato* $\mathcal{I} \subset 2^X$ *e indichiamo con* $\mathcal{A}$ *la famiglia delle* σ*-algebre in* X *contenti* $\mathcal{I}$. *Allora*

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \cap_{\Sigma\in\mathcal{A}}\Sigma$$

è una σ*-algebra in* X. *Essa è detta "la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{I}$*".*

PROPOSIZIONE 2.2 (**). *Sia* X *uno spazio topologico e indichiamo con* $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$, *rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di* X. *Allora:*

(1) *Si ha* $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$;
(2) *Se* X *è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione* $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$;
(3) *Se* (X, d) *è uno spazio metrico separabile, si ha* $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$.

DEFINIZIONE 2.2. *Sia* X *uno spazio topologico. Allora:*

(i) *La* σ*-algebra in* $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ *viene indicata con* $\mathcal{B}(X)$ *e i suoi elementi sono detti "insiemi boreliani";*
(ii) *Una misura esterna su* X *è detta "boreliana" (oppure "di Borel") se* $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$;
(iii) *Una misura esterna* φ *su* X *è detta "Borel regolare" se è boreliana e se inoltre per ogni insieme* $A \in 2^X$ *esiste* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tale che* $B \supset A$ *e* $\varphi(B) = \varphi(A)$;
(iv) *Una misura esterna* φ *su* X *è detta "di Radon" se è Borel regolare e se* $\varphi(K) < \infty$ *per ogni insieme compatto* K *in* X.

Da Proposizione 1.1 e Teorema 2.2 segue subito il seguente risultato.

Corollario 2.1 (°). *Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è boreliana.*

Lemma 2.1 (°). *Consideriamo uno spazio topologico X e sia $\mathcal{D} \subset 2^X$ tale che:*

(i) $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{D}$;
(ii) $\mathcal{D}$ *è chiuso rispetto all'unione numerabile e rispetto all'intersezione numerabile.*

Allora $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D}$.

Teorema 2.3 (***). *Sia φ una misura esterna boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $B \subset \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$.*

3. Terza settimana (IX ; 9)
Misure esterne di Lebesgue e di Hausdorff.

Corollario 3.1. *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ e $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$.*

Teorema 3.1 (**). *Si consideri la funzione $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da*

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \Big\{ \sum_j v(I_j) \,\Big|\, \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \Big\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di E costituiti di intervalli aperti in $\mathbb{R}^n$, mentre $v(I_j)$ denota la misura elementare dell'intervallo I_j. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna metrica ed è di Radon.

Definizione 3.1. *La misura esterna $\mathcal{L}^n$ definita in Teorema 3.1 è detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".*

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

Teorema 3.2 (**). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni* $a \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$*;*
(2) *Se* I *è un intervallo aperto in* $\mathbb{R}^n$*, si ha* $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$*;*
(3) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\mathcal{L}^n(E+\tau) = \mathcal{L}^n(E)$*;*
(4) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *si ha* $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$*.*

Esempio 3.1. Si ha $\mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n) = 0$. L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è misurabile.

Esempio 3.2 (Esistenza di insiemi non misurabili). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0,1]$: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme E di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, poniamo infine

$$E_i := (E \cap [0, q_i] + 1 - q_i) \cup (E \cap (q_i, 1] - q_i).$$

Allora E non è misurabile. Se lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli E_i. Poiché questi sono a-due-a-due disgiunti e la loro unione è $[0,1]$, si giungerebbe all'assurdo:

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) = \mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i\Big) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

Osservazione 3.1. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

Osservazione 3.2. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^n$ ma non sono boreliani.

Teorema 3.3 (**). *Dati* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\delta > 0$*, indichiamo con* $\mathcal{R}_\delta(E)$ *la famiglia dei ricoprimenti numerabili* $\{C_j\}$ *di* E *tali che* $diam(C_j) \le \delta$ *per ogni* j*. Per* $s \in [0, +\infty)$*, poniamo anche*

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ *definita da*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \,\middle|\, \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\}$$

è una misura esterna.

4. Quarta settimana (X ; 12)
Misura esterna di Hausdorff, misure astratte, funzioni misurabili.

Teorema 4.1 (**). *Sia* $s \in [0, +\infty)$ *e* $E \subset \mathbb{R}^n$*. Allora la funzione* $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ *è monotona decrescente, quindi esiste*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ *è una misura esterna metrica e Borel regolare, ma non di Radon (eccetto che per* $s = n$*).*

Definizione 4.1. $\mathcal{H}^s$ *è detta "misura esterna di Hausdorff* s*-dimensionale".*

Teorema 4.2 (**). *La misura esterna di Hausdorff gode delle seguenti proprietà:*

(1) $\mathcal{H}^0 = \#$ *(misura del conteggio);*
(2) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *(in $\mathbb{R}^n$);*
(3) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{H}^s(E+\tau) = \mathcal{H}^s(E)$;*
(4) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$ si ha $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$;*
(5) *Se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ e $s > 0$, allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ per ogni $t > s$.*

Definizione 4.2. *La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è il numero*

$$dim_H(E) := \inf\{s \in [0, +\infty) \,|\, \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Esempio 4.1. Se C è una curva regolare (in $\mathbb{R}^n$), allora $\dim_H(C) = 1$. L'insieme di Cantor ha dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2/\ln 3$ (sketch, per una dimostrazione completa vedasi [**4**, Theorem 1.14]).

Definizione 4.3. *Sia X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Allora, una "misura su $\mathcal{A}$" è una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) *se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti, allora $\mu(\cup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$.*

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detta "spazio con misura".

Come conseguenza di Teorema 1.1 e Proposizione 1.1, otteniamo subito il seguente risultato.

Proposizione 4.1 (°). *Se φ è una misura esterna sull'insieme X, allora $\varphi|\mathcal{M}_\varphi$ è una misura su $\mathcal{M}_\varphi$.*

Esempio 4.2. La "misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$, indicate per semplicità con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$ rispettivamente.

Osservazione 4.1. Ci si può chiedere se una misura provenga sempre da una misura esterna nel modo indicato in Proposizione 4.1. Una risposta quasi affermativa è data dal seguente risultato (vedasi [**5**, Theorem 4.47]): Se μ è una misura su una σ-algebra $\mathcal{A}$ in X, allora esiste una misura esterna φ su X tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$ e $\varphi|\mathcal{A} = \mu$.

Definizione 4.4. *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e Y, rispettivamente, uno spazio con misura e uno spazio topologico. Allora una funzione $f : X \to Y$ si dice "misurabile" se per ogni aperto G in Y si ha $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.*

Osservazione 4.2. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, Y uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione misurabile. Allora la famiglia $\{E \in 2^Y \,|\, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ è una σ-algebra contenente i boreliani.

Proposizione 4.2 (°). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano Y, Z spazi topologici. Supponiamo inoltre che $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ siano, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione continua. Allora $g \circ f : X \to Z$ è una funzione misurabile.*

PROPOSIZIONE 4.3 (**). *Siano dati uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Allora le seguenti affermazioni sono fra di loro equivalenti:*

(1) f *è misurabile;*
(2) $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*;*
(3) $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*;*
(4) $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*;*
(5) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

CHAPTER 2

Funzioni misurabili e integrale.

1. Quinta settimana (XI ; 15) Funzioni misurabili, teoremi di Egoroff e di Lusin.

Teorema 1.1 (**). *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ misurabili. Allora $f+g$, $|f|$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili. Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, la funzione f/g è misurabile.*
(2) *Sia data una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Allora le funzioni $\inf_k f_k$, $\sup_k f_k$, $\liminf_k f_k$ e $\limsup_k f_k$ sono misurabili.*

Osservazione 1.1. La tesi (1) di Teorema 1.1 si estende facilmente a $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, in tutti i casi in cui ha senso.

Teorema 1.2 (Egoroff (***)). *Siano dati:*

(i) *uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che $\mu(X) < +\infty$;*
(ii) *una successione di funzioni misurabili $f_j : X \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \dots)$ che converge puntualmente quasi ovunque a $f : X \to \mathbb{R}$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(X - A_\varepsilon) \le \varepsilon$ e f_j converge a f uniformemente in A_ε.

Osservazione 1.2. Il Teorema 1.2 si estende facilmente al caso in cui X è σ-finito rispetto a μ, cioè quando esistono $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{A}$ tali che $\cup_j X_j = X$ e $\mu(X_j) < +\infty$ per ogni j.

Definizione 1.1. *Sia X un insieme. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice "numerabilmente semplice" se Im(f) è numerabile.*

Osservazione 1.3. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione numerabilmente semplice, con $\mathrm{Im}(f) = \{a_i\}$, si ha

$$f = \sum_i a_i \varphi_{E_i}, \qquad E_i := f^{-1}(\{a_i\}).$$

Se f è misurabile, allora $E_i \in \mathcal{A}$ per ogni i (per Osservazione 4.2).

Teorema 1.3 (**). *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$. Allora esiste una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili $s_j : X \to \mathbb{R}$ tali che Im(s_j) è finito, $0 \le s_j \le s_{j+1} \le f$ e s_j converge puntualmente a f. Inoltre, se f è limitata la convergenza è uniforme.*

Definizione 1.2. *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura tale che* X *sia anche uno spazio topologico e si abbia* $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$*. Allora una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *si dice "quasi continua" se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un sottoinsieme chiuso* F *di* X *tale che* $\mu(X - F) \leq \varepsilon$ *e* $f|F$ *è continua.*

Teorema 1.4 (Lusin (***)). *Sia dato uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *con* $\mu(X) < +\infty$ *e tale che:*

(i) X *è uno spazio topologico e* $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$*;*
(ii) *per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un sottoinsieme chiuso* F *di* A *soddisfacente* $\mu(A - F) \leq \varepsilon$*.*

Allora ogni funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ *è quasi continua.*

Osservazione 1.4. Il Teorema 1.4 si estende facilmente al caso in cui X è σ-finito rispetto a μ, cioè quando esistono $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{A}$ tali che $\cup_j X_j = X$ e $\mu(X_j) < +\infty$ per ogni j.

Ricordando Corollario 3.1, si ottiene subito il seguente risultato.

Corollario 1.1 (°). *Sia* φ *una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico* (X, d)*, tale che* X *è* σ*-finito rispetto a* φ*. Allora ogni funzione misurabile* $f : X \to \mathbb{R}$ *è quasi continua.*

2. Sesta settimana (XII ; 18)
Integrale di una funzione.

Definizione 2.1. *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e indichiamo con* Σ *la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Allora:*

(i) *Se* $\varphi \in \Sigma$ *e* $\varphi \geq 0$*, poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := \sum_i a_i \mu(E_i); \qquad \{a_i\} = Im(\varphi),\ E_i := \varphi^{-1}(\{a_i\})$$

dove si assume per convenzione che $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$*;*

(ii) *Se* $\varphi \in \Sigma$ *e almeno uno di* $I_\mu(\varphi \vee 0)$ *e* $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$ *è finito, allora poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((-\varphi) \vee 0).$$

Definizione 2.2. *Siano dati uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Indichiamo con* Σ^* *la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che almeno uno di* $I_\mu(\varphi \vee 0)$ *e* $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$ *sia finito. Poniamo poi*

$$\Sigma_-(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \leq f \ \mu\text{-q.o.}\}, \qquad \Sigma_+(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \geq f \ \mu\text{-q.o.}\}.$$

Allora:

(i) *L'"integrale superiore di f" è dato da*

$$\int^* f\,d\mu := \inf\{I_\mu(\varphi)\,|\,\varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

mentre l'"integrale inferiore di f" è

$$\int_* f\,d\mu := \sup\{I_\mu(\varphi)\,|\,\varphi \in \Sigma_-(f)\};$$

(ii) *Si dice che "f è integrabile" se f è misurabile e gli integrali inferiore e superiore di f sono uguali. In tal caso si definisce l'"integrale di f"*

$$\int f\,d\mu := \int^* f\,d\mu = \int_* f\,d\mu.$$

(iii) *Si dice che "f è sommabile" se f è integrabile e $\int f d\mu$ è finito.*

Osservazione 2.1. Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e due funzioni $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f = g$ μ-q.o.. Allora:

(1) Si ha

$$\int^* f\,d\mu = \int^* g\,d\mu, \qquad \int_* f\,d\mu = \int_* g\,d\mu;$$

(2) Se f è sommabile e g è misurabile, allora anche g è sommabile e si ha

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Il seguente risultato elenca le prime proprietà dell'integrale, ben note nella trattazione elementare.

Teorema 2.1 (***). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se $\varphi \in \Sigma^*$ e $I_\mu(\varphi)$ è finito, allora φ è sommabile e si ha $\int \varphi\,d\mu = I_\mu(\varphi)$;*
(2) *Una funzione sommabile è finita μ-q.o.;*
(3) *Se f, g sono funzioni sommabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ è sommabile e si ha*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu;$$

(4) *Se f, g sono funzioni sommabili e $f \le g$, allora*

$$\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu;$$

(5) *Se f è una funzione sommabile e $A \in \mathcal{A}$, allora $f\varphi_A$ è una funzione sommabile;*
(6) *Una funzione misurabile f è sommabile se e soltanto se $|f|$ è una funzione sommabile;*
(7) *Se f è una funzione sommabile, allora*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu.$$

3. Settima settimana (XIII ; 21)
Passaggio al limite nell'integrale.

Definizione 3.1. *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Se* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione misurabile e se* $A \in \mathcal{A}$*, allora:*

(i) *Se* $f\varphi_A$ *è integrabile, si dice che "*f *è integrabile in* A*"e si pone*

$$\int_A f \, d\mu := \int f\varphi_A \, d\mu;$$

(ii) *Si dice che "*f *è sommabile in* A*" se* $f\varphi_A$ *è sommabile.*

Vale il seguente teorema che manifesta la maggior "versatilità" di questa questa teoria dell'integrazione rispetto a quella elementare di Riemann.

Teorema 3.1 (**). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una funzione misurabile* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $f \geq 0$ μ*-q.o. Allora* f *è integrabile.*

Da questo seguono i seguenti corollari.

Corollario 3.1 (*). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Se* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sono rispettivamente una funzione sommabile e una funzione integrabile (in particolare:* g *misurabile tale che* $g \geq 0$ μ*-q.o), allora* $f + g$ *è integrabile e si ha*

$$\int (f+g) d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Corollario 3.2 (*). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Siano* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione sommabile soddisfacenti* $|f| \leq |g|$ μ*-q.o. Allora* f *è sommabile.*

Teorema 3.2 (Lemma di Fatou (***)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\int \liminf_k f_k \, d\mu \leq \liminf_k \int f_k \, d\mu.$$

Teorema 3.3 (Convergenza monotona (**)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_{k+1} \geq f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\lim_k \int f_k \, d\mu = \int \lim_k f_k \, d\mu.$$

Corollario 3.3 (°). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\int \sum_k f_k \, d\mu = \sum_k \int f_k \, d\mu.$$

Corollario 3.4 (°). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una famiglia numerabile di insiemi* $A_k \in \mathcal{A}$ *a-due-a-due disgiunti e tali che* $\cup_k A_k = X$. *Se* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione sommabile allora esiste* $\sum_k \int_{A_k} f\, d\mu$ *e si ha*

$$\int f\, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f\, d\mu.$$

Teorema 3.4 (Convergenza dominata (**)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Consideriamo:*

(i) *Una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *che converge* μ*-q.o. a* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*;*
(ii) *Una funzione sommabile* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $|f_k| \leq g$ μ*-q.o., per ogni* k.

Allora

$$\lim_k \int |f_k - f|\, d\mu = 0.$$

In particolare, ogni f_k *e* f *sono sommabili e vale*

$$\lim_k \int f_k\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Quanto al confronto fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, vale il seguente risultato (solo enunciato, dimostrazione e.g. in [**5**, Theorem 6.16]).

Teorema 3.5. *Una funzione limitata* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Riemann se e solo se* f *è continua* $\mathcal{L}^1$*-q.o. in* $[a, b]$.

CHAPTER 3

Spazi L^p e Teorema di Radon-Nikodym.

1. Ottava settimana (XV ; 24)
Spazi L^p.

DEFINIZIONE 1.1. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Se $p \in [1, +\infty]$ e $A \in \mathcal{A}$, con $L^p(A)$ indicheremo la classe delle funzioni misurabili $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\|f\|_{p,A} < \infty$, dove*

$$\|f\|_{p,A} := \begin{cases} (\int_A |f|^p d\mu)^{1/p} & \textit{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \inf\{M \,|\, |f| \leq M \ \mu\text{-}\textit{q.o. in } A\} & \textit{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Il numero $\|f\|_{p,A}$ è detto "norma L^p di f in A". Per semplicità si scrive $\|f\|_p$ al posto di $\|f\|_{p,X}$.

TEOREMA 1.1 (Disuguaglianza di Hölder (**)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Allora*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove $p, p' \in [1, +\infty]$ sono coniugati, cioè tali che $p = 1$ e $p' = +\infty$ (o viceversa) oppure

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad (\textit{con } p, p' \in (1, +\infty)).$$

TEOREMA 1.2 (*). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura, $p \in [1, +\infty]$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Allora*

(1) $\|f\|_p \geq 0$;
(2) $\|f\|_p = 0$ *se e solo se $f = 0$ quasi ovunque (rispetto a μ);*
(3) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$, *per ogni $c \in \mathbb{R}$.*

TEOREMA 1.3 (**). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale e vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textit{Disuguaglianza di Minkowski})$$

per ogni $f, g \in L^p(X)$.

OSSERVAZIONE 1.1. Facendo il quoziente di $L^p(X)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o.}$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale normato che (per semplicità) continueremo a indicare con la notazione $L^p(X)$.

Teorema 1.4 (Fisher-Riesz (***)). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora lo spazio vettoriale normato $L^p(X)$ è uno spazio di Banach.*

Dalla dimostrazione di Teorema 1.4 segue subito il seguente risultato.

Proposizione 1.1 (°). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora ogni successione convergente in $L^p(X)$ ha una sottosuccessione convergente q.o.*

Osservazione 1.2. In generale una successione convergente in $L^p(X)$ non converge q.o. Esempio.

Esempio 1.1. Consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, dove μ indica la misura del conteggio. Se $p \in [1, +\infty]$, indichiamo con l_p la famiglia delle successioni $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ tali che $\|\{a_j\}\|_{l_p} < +\infty$, dove

$$\|\{a_j\}\|_{l_p} := \begin{cases} \left(\sum_j |a_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \le p < +\infty, \\ \sup_j |a_j| & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Allora $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ è uno spazio normato isometrico a $L^p(\mathbb{N})$ e quindi è anche completo.

Osservazione 1.3. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Valgono i seguenti fatti:

- Se $p \in [1, +\infty]$, un esempio di funzionale lineare su $L^p(X)$ è dato da

$$F_g : f \mapsto \int f g \, d\mu, \qquad f \in L^p(X) \tag{1.1}$$

  dove $g \in L^{p'}(X)$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue subito che F_g è limitato e $\|F_g\| \le \|g\|_{p'}$. Si può anzi provare che $\|F_g\| = \|g\|_{p'}$ (si veda [**5**, Theorem 6.21]), da cui segue subito anche l'iniettività della mappa $g \mapsto F_g$.

- Per $p \in [1, +\infty)$ si ha che ogni funzionale lineare limitato F su $L^p(X)$ è del tipo (1.1). Vale infatti il seguente risultato [**5**, Theorem 6.43] per la cui dimostrazione è decisivo il Teorema di Radon-Nikodym che proveremo in seguito (Teorema 3.2).

  Teorema 1.5 (Rappresentazione di Riesz). *Sia $p \in [1, +\infty)$ e sia F un funzionale lineare limitato su $L^p(X)$. Allora esiste $g \in L^{p'}(X)$, unica, tale che $F = F_g$.*

  Osserviamo che l'affermazione dell'unicità è banale, già ben sapendo che $g \mapsto F_g$ è iniettiva.

- Per $p = +\infty$ si ha che non tutti i funzionali lineari e limitati sono del tipo (1.1). Un esempio costruibile mediante il Teorema di Hahn-Banach (che incontreremo in seguito) è quello di un funzionale lineare e limitato F su $L^\infty(\mathbb{R})$ soddisfacente $F(f) = f(0)$ per ogni $f \in C_0(\mathbb{R})$. Ebbene, si può verificare che in questo caso non può esistere $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che valga $F = F_g$. Per una dimostrazione completa di questo fatto, si veda [**1**, Capitolo IV.3].

2. Nona settimana (XVI ; 27)
Misure con segno. Teoremi di decomposizione di Hahn e di Jordan.

Definizione 2.1. *Sia X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Allora una funzione $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta "misura con segno" se sono verificare le seguenti proprietà:*

(i) *ν assume al più uno soltanto dei valori $+\infty$ e $-\infty$;*
(ii) *$\nu(\emptyset) = 0$;*
(iii) *Se $\{A_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti, allora si ha $\nu(\cup_j A_j) = \sum_j \nu(A_j)$, dove le due serie*
$$\sum_j \nu(A_j) \vee 0, \qquad \sum_j (-\nu(A_j)) \vee 0$$
non divergono mai contemporaneamente;

La terna $(X, \mathcal{A}, \nu)$ è detta "spazio con misura con segno". Inoltre si dice che un insieme $A \in \mathcal{A}$ è "positivo (risp. negativo) [risp. nullo] per ν" se $\nu(E) \geq 0$ (risp. $\nu(E) \leq 0$) [risp. $\nu(E) = 0$] per ogni $E \in \mathcal{A}$ tale che $E \subset A$:

Esempio 2.1. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile tale che almeno una di $f \vee 0$ e $(-f) \vee 0$ sia sommabile. Allora
$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{A}$$
definisce una misura con segno. Osserviamo che $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ è un insieme positivo per ν, mentre $\{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$ è un insieme negativo per ν. L'insieme $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ è nullo per ν.

Lemma 2.1 (**). *Consideriamo uno spazio con misura con segno $(X, \mathcal{A}, \nu)$ e $E \in \mathcal{A}$ tale che $\nu(E) \in (0, +\infty)$. Allora esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $A \subset E$, A è positivo e $\nu(A) > 0$.*

Teorema 2.1 (Decomposizione di Hahn (***)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \nu)$ uno spazio con misura con segno. Allora esistono $P, N \in \mathcal{A}$ tali che P è positivo per ν, N è negativo per ν e $X = P \cup N$.*

Osservazione 2.1. Se c'è un insieme non vuoto e nullo per ν, allora esistono più decomposizioni di Hahn.

Definizione 2.2. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X.*

(1) *Se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una misura con segno, allora si dice che "ν è assolutamente continua rispetto a μ" se $\nu(A) = 0$ ogni volta che $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) = 0$. In tal caso si scrive $\nu \ll \mu$.*

(2) *Se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ sono misure, allora si dice che "μ_1 e μ_2 sono mutuamente singolari" se esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu_1(A) = 0$ e $\mu_2(X - A) = 0$. In tal caso si scrive $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Teorema 2.2 (Decomposizione di Jordan (**)). *Dato uno spazio con misura con segno* $(X, \mathcal{A}, \nu)$, *esiste una ed una sola coppia di misure mutuamente singolari* ν^+ *e* ν^- *tale che:*

(i) *almeno una di esse è finita;*
(ii) *vale* $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$.

La misura $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ *è detta "variazione totale di* ν*".*

Proposizione 2.1 (*). *Siano* X *un insieme,* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *una misura e* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una misura con segno. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $\nu << \mu$;
(2) $|\nu| << \mu$;
(3) $\nu^+ << \mu$ *e* $\nu^- << \mu$.

Teorema 2.3 (**). *Siano* X *un insieme,* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *una misura e* $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *una misura con segno (nota bene:* ν *è finita!). Allora* $\nu << \mu$ *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $\mu(E) \leq \delta$ *implica* $|\nu(E)| \leq \varepsilon$.

3. Decima settimana (XVII ; 30) Teorema di Radon-Nikodym.

Definizione 3.1. *Siano* X *un insieme e* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X. *Una "partizione (misurabile di* X*)" è una famiglia finita* $\mathcal{P} : \{A_1, \dots, A_m\}$ *di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti tali che* $\cup_i A_i = X$. *Una partizione* $\mathcal{P}'$ *è detta "raffinamento" di* $\mathcal{P}$ *se per ogni* $A' \in \mathcal{P}'$ *esiste* $A \in \mathcal{P}$ *tale che* $A' \subset A$.

Lemma 3.1 (**). *Siano* X *un insieme,* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X *e* $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ *due misure (nota bene:* λ, μ *sono finite) tali che* $\lambda(A) \leq \mu(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$. *Sia* $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_m\}$ *una partizione misurabile di* X *e sia* $\mathcal{P}'$ *un raffinamento di* $\mathcal{P}$. *Poniamo*

$$h_{\mathcal{P}} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} \varphi_{A_i}$$

dove si assume la convenzione $\frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} := 0$ *se* $\mu(A_i) = 0$. *Analogamente definiamo* $h_{\mathcal{P}'}$. *Allora, per ogni* $A \in \mathcal{P}$ *si ha*

$$\lambda(A) = \int_A h_{\mathcal{P}} \, d\mu = \int_A h_{\mathcal{P}'} \, d\mu$$

e

$$\int_A h_{\mathcal{P}'}^2 \, d\mu = \int_A h_{\mathcal{P}}^2 \, d\mu + \int_A (h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}})^2 \, d\mu \geq \int_A h_{\mathcal{P}}^2 \, d\mu.$$

Teorema 3.1 (***). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura tale che* $\mu(X) < +\infty$ *e sia* λ *una misura su* $\mathcal{A}$ *tale che* $\lambda(A) \leq \mu(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$. *Allora esiste una funzione* *misurabile* $f : X \to [0,1]$ *tale che*

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ *(nota bene:* f *è sommabile!). Inoltre, se* $g : X \to [0,+\infty]$ *è una funzione misurabile, si ha*

$$\int_X g\, d\lambda = \int_X gf\, d\mu.$$

Teorema 3.2 (Radon-Nikodym (***)). *Siano dati uno spazio con misura* σ*-finita* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una misura con segno* σ*-finita* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $\nu \ll \mu$. *Allora esiste una funzione misurabile* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che almeno una di* $f \vee 0$ *e* $(-f) \vee 0$ *sia sommabile (quindi* f *è integrabile) e vale*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$. *Tale funzione* f *è chiamata "la derivata di Radon-Nikodym di* ν *rispetto a* μ*" e si denota col simbolo* $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Il seguente risultato, che enunceremo soltanto, si dimostra facilmente sfruttando l'argomento utilizzato all'inizio del primo passo della dimostrazione di Teorema 3.2 (si veda [**5**, Theorem 6.39]).

Teorema 3.3 (Decomposizione di Lebesgue). *Si considerino un insieme* X, *una* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *e due misure* σ*-finite* $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$. *Allora esiste una ed una sola coppia di misure* $\nu_0, \nu_1 : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ *tale che* $\nu = \nu_0 + \nu_1$ *con* $\nu_0 \ll \mu$ *e* $\nu_1 \perp \mu$.

CHAPTER 4

Analisi funzionale. Spazi di Banach e di Hilbert.

1. Undicesima settimana (XVIII ; 33) Spazi di Banach, Teorema di Hahn-Banach.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano X e Y spazi vettoriali (su $\mathbb{R}$). Allora $L(X,Y)$ denota lo spazio vettoriale degli operatori lineari $T : X \to Y$. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati, $BL(X,Y)$ indica il sottospazio vettoriale di $L(X,Y)$ formato dagli operatori lineari e continui $T : X \to Y$. Per semplicità scriveremo X' in luogo di $BL(X,\mathbb{R})$.*

OSSERVAZIONE 1.1. Siano X e Y spazi vettoriali e $T \in L(X,Y)$. Allora T è continuo se e solo se T è continuo in un punto fissato qualsiasi $x_0 \in X$.

OSSERVAZIONE 1.2. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati di dimensione finita allora $BL(X,Y) = L(X,Y)$.

PROPOSIZIONE 1.1 (**). *Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati e $T \in L(X,Y)$, le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(1) *$T \in BL(X,Y)$;*
(2) *T è continuo in 0;*
(3) *Esiste $M > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \le M\,\|x\|_X$ per ogni $x \in X$;*
(4) *T è Lipschitz;*
(5) *T è limitato, i.e. $T(A)$ è un insieme limitato in Y se A è un insieme limitato in X;*

ESEMPIO 1.1. Sia $X := C^1([0,1])$, $Y := C^0([0,1])$ e $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_\infty$. Allora l'operatore

$$T : X \to Y, \qquad Tf := f'$$

è lineare ma non è continuo (e.g. se $f_j(t) := t^j$, la successione $\{f_j\}$ è limitata mentre $\{Tf_j\}$ è illimitata). Osserviamo che se in X consideriamo la norma $\|\cdot\|_{C^1}$ (al posto di $\|\cdot\|_\infty$) allora l'operatore T risulta essere continuo.

TEOREMA 1.1 (***). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati. Allora la funzione*

$$\|T\|_{BL} := \inf\{M > 0 \mid \|Tx\|_Y \le M\,\|x\|_X \text{ per ogni } x \in X\}, \quad T \in BL(X,Y)$$

è una norma in $BL(X,Y)$. Si ha anche

$$\|T\|_{BL} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \tag{1.1}$$

Inoltre, $(BL(X,Y), \|\cdot\|_{BL})$ è uno spazio di Banach se $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lo è.

Osservazione 1.3. Nel caso che X sia di dimensione finita, la palla unitaria chiusa di $(X, \|\cdot\|_X)$

$$B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

è un insieme compatto e quindi gli ultimi due "sup" in (1.1) sono in realtà dei "max". Vediamo ora un esempio in cui tale conclusione non è verificata. Consideriamo il caso che $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ coincidano entrambi con lo spazio di Banach $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ definito in Esempio 1.1. Sia poi $T : l_1 \to l_1$ l'operatore lineare che associa a $x = (x_1, x_2, \dots)$ l'elemento $Tx = (y_1, y_2, \dots)$, con

$$y_i := \left(1 - \frac{1}{i}\right) x_i$$

per ogni $i = 1, 2, \dots$ Si vede allora facilmente che $\|T\|_{BL} = 1$ ma che non esiste alcun $x \in B_{l_1}$ tale che $\|Tx\|_{l_1} = \|T\|_{BL} = 1$.

La precedente osservazione mostra, tra l'altro, che B_{l_1} non è un insieme compatto. In realtà questo fatto si estende a tutti gli spazi di Banach di dimensione infinita. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2 (°). *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach. Allora B_X è un insieme compatto se e soltanto se X ha dimensione finita.*

Esso è una conseguenza immediata del seguente lemma.

Lemma 1.1 (**). *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach di dimensione infinita. Allora esiste una famiglia numerabile $\{x_1, x_2, \dots\}$ di vettori unitari in X tali che*

$$dist(x_j, span\{x_1, \dots, x_{j-1}\}) = 1$$

per ogni $j = 2, 3, \dots$

Teorema 1.3 (Hahn-Banach analitico (***)). *Sia X uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) e sia g un operatore lineare definito in un sottospazio G di X. Supponiamo che esista una funzione $p : X \to \mathbb{R}$ positivamente omogenea e subadditiva tale che $g \leq p|_G$. Allora esiste un operatore lineare $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $f|_G = g$ e $f \leq p$.*

2. Dodicesima settimana (XIX; 36)
Separazione di insiemi convessi. Teoremi dell'uniforme limitatezza, dell'applicazione aperta.

Corollario 2.1 ((**)). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se G è un sottospazio vettoriale di X e $g : G \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare continuo, allora esiste $f \in X'$ tale che*

$$f|_G = g, \qquad \|f\|_{BL} = \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}} |g(x)|;$$

(2) *Per ogni $x_0 \in X$ esiste $f \in X'$ tale che*

$$f(x_0) = \|x_0\|, \qquad \|f\|_{BL} = 1.$$

Si ha pertanto

$$\|x_0\| = \max_{\substack{f\in X'\\ \|f\|_{BL}\leq 1}} f(x_0) = \max_{\substack{f\in X'\\ \|f\|_{BL}\leq 1}} |f(x_0)|.$$

Osservazione 2.1. Come abbiamo spiegato in Osservazione 1.3, il Teorema di Hahn-Banach (anzi Corollario 2.1) permette costruire un funzionale di $(L^\infty(\mathbb{R}))'$ non rappresentabile per integrazione.

Come applicazione del Teorema di Hahn-Banach, si ottiene questo importante risultato di analisi convessa.

Teorema 2.1 (Separazione di convessi (***)). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Consideriamo due sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti A, B di X e supponiamo che A sia aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B, cioè esistono $f \in X'\backslash\{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f|_A \leq \alpha$ e $f|_B \geq \alpha$.*

Vale anche il seguente ulteriore teorema di separazione, per la cui dimostrazione rimandiamo a [**1**, Teorema I.7].

Teorema 2.2 (Separazione stretta di convessi). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Consideriamo due sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti A, B di X con A chiuso e B compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente A e B, cioè esistono $f \in X'\backslash\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $f|_A \leq \alpha - \varepsilon$ e $f|_B \geq \alpha + \varepsilon$.*

Il seguente risultato servirà per provare il successivo teorema, dovuto a Banach e Steinhaus. Per la sua dimostrazione vedasi [**1**, Lemma II.1].

Teorema 2.3 (Lemma di Baire). *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $\{X_i\}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi di X tali che $X_i^\circ = \emptyset$ per ogni i. Allora si ha anche $(\cup_i X_i)^\circ = \emptyset$.*

Teorema 2.4 (Uniforme limitatezza (**)). *Siano dati uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e uno spazio vettoriale normato $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Si consideri una sottofamiglia $\{T_i\}_{i\in I}$ di $BL(X,Y)$, non necessariamente numerabile, tale che* $\sup_i \|T_i x\|_Y < +\infty$ *per ogni $x \in X$. Allora* $\sup_i \|T_i\|_{BL} < +\infty$.

Corollario 2.2 (*). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio di Banach e uno spazio vettoriale normato, rispettivamente. Sia $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione in $BL(X,Y)$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $Tx := \lim_i T_i x$ (in Y). Allora $T \in BL(X,Y)$ e $\|T\|_{BL} \leq \sup_i \|T_i\|_{BL} < +\infty$.*

Se $(Z, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, con la notazione $U_Z(z_0, r_0)$ si indica la palla aperta centrata in $z_0 \in Z$ e di raggio $r_0 > 0$. Vale il seguente importante risultato.

Teorema 2.5 (Applicazione aperta (***)). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach e sia dato $T \in BL(X, Y)$ suriettivo. Allora:*

(1) *Esiste $r > 0$ tale che $U_Y(0, r) \subset T(U_X(0, 1))$;*
(2) *T trasforma ogni aperto di X in un aperto di Y.*

3. Tredicesima settimana (XX; 39)
Teoremi del grafico chiuso. Spazi di Hilbert.

Osservazione 3.1. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach. Allora $X \times Y$ con la norma

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y, \qquad (x, y) \in X \times Y$$

è a sua volta uno spazio di Banach.

Teorema 3.1 (Grafico chiuso (*)). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach e sia dato $T \in L(X, Y)$ tale che il suo grafico $\{(x, Tx) \mid x \in X\}$ è un sottoinsieme chiuso di $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Allora T è continuo.*

Osservazione 3.2. Il teorema del grafico chiuso non si estende, in generale, alle mappe non lineari. Per esempio, se $X = Y = \mathbb{R}$, il grafico della funzione così definita

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1/x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Evidentemente, però, f non è continua.

Il seguente risultato di natura geometrica per gli spazi di Hilbert ha importanti applicazioni (per esempio alle disuguaglianze variazionali).

Teorema 3.2 (***). *Sia K un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Hilbert H. Allora:*

(1) *Per ogni $x \in H$ esiste uno e un solo punto $y \in K$ tale che $\|x - y\| = dist(x, K)$. Tale punto è detto "la proiezione di x su K" ed è indicato con $P_K(x)$;*
(2) *Dati $x \in H$ e $y \in K$ si ha $\|x - y\| = dist(x, K)$ se e solo se $(x - y, z - y) \leq 0$ per ogni $z \in K$;*
(3) *Per ogni $x_1, x_2 \in H$ si ha $\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$.*

Nel caso particolare di un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert si ottiene facilmente il seguente corollario.

Corollario 3.1 (*). *Se K è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H, si ha*

$$x - P_K(x) \in K^\perp$$

per ogni $x \in K$. Vale quindi la decomposizione $H = K \oplus K^\perp$.

Osservazione 3.3. Il Corollario 3.1 stabilisce che se K è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H allora si ha $\mathrm{Im}(I - P_K) \subset K^\perp$. A questo punto però è facile verificare che vale anche l'inclusione opposta. Infatti, per ogni $\nu \in K^\perp$ si ha $P_K(\nu) = P_K(\nu) - \nu + \nu \in K^\perp$. Quindi $P_K(\nu) \in K \cap K^\perp = \{0\}$, da cui segue subito $\nu = (I - P_K)(\nu) \in \mathrm{Im}(I - P_K)$.

Teorema 3.3 (Rappresentazione di Riesz (**)). *Dato uno spazio di Hilbert H, consideriamo la mappa $J : H \to H'$ che associa a $h \in H$ il funzionale lineare continuo*

$$Jh : H \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Jh(x) := (h, x).$$

Allora J è un isomorfismo isometrico.

Veniamo ora alla questione dell'esistenza di basi ortonormali in uno spazio di Hilbert.

Definizione 3.1. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora un sottoinsieme F di H è detto "famiglia ortonormale (in H)" se per ogni $x, y \in F$ si ha*

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ 1 & se\ x = y. \end{cases}$$

Una "famiglia ortonormale completa (in H)" è una famiglia ortonormale F che soddisfa la seguente condizione: se $h \in H$ è tale che $(h, x) = 0$ per ogni $x \in F$ allora si ha $h = 0$.

Osservazione 3.4. Sia F una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert H e si indichi con Γ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari finite di elementi di F. Se Γ è denso in H allora F è una famiglia ortonormale completa.

Come applicazione del Lemma di Zorn si prova facilmente l'esistenza delle famiglie ortonormali complete.

Teorema 3.4 (**). *Ogni spazio di Hilbert H contiene una famiglia ortonormale completa. Se H è separabile allora ogni famiglia ortonormale (in particolare, ogni famiglia ortonormale completa) è numerabile.*

4. Quattordicesima settimana (XXI; 42) Serie di Fourier, teoria L^2.

Teorema 4.1 (***). *Sia $\{u_1, u_2, \dots\}$ una famiglia ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert H. Valgono allora i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i)^2 \leq \|h\|^2$ (disuguaglianza di Bessel);*

(2) *Se* $h \in H$ *e* $c_1, c_2, \ldots$ *sono numeri reali, si ha*

$$\Big\| h - \sum_{i=1}^{m} (h, u_i) u_i \Big\| \leq \Big\| h - \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \Big\|$$

per ogni $m \geq 1$*;*

(3) *Siano* $c_1, c_2, \ldots$ *numeri reali. Allora* $\sum_i c_i u_i$ *converge in* H *se e soltanto se* $\sum_i c_i^2 < +\infty$*. In questo caso la somma della serie non dipende dall'ordine dei suoi addendi (si dice anche che "la serie converge incondizionatamente").*

Teorema 4.2 (**). *Sia* F *una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert* H*. Allora, per ogni* $h \in H$*:*

(1) *L'insieme* $F_h := \{u \in F \,|\, (h, u) \neq 0\}$ *è numerabile;*
(2) *Se* $u_1, u_2, \ldots$ *sono gli elementi di* F_h*, la serie* $\sum_j (h, u_j) u_j$ *converge incondizionatamente;*
(3) *Se* F *è una famiglia ortonormale completa e* $u_1, u_2, \ldots$ *sono gli elementi di* F_h*, si ha* $\sum_j (h, u_j) u_j = h$*.*

Un'importante applicazione della teoria precedente si ottiene per $H = L^2(-\pi, \pi)$, dove la misura sottogiacente è ovviamente quella di Lebesgue in $\mathbb{R}$. Si tratta della cosiddetta "teoria L^2 delle serie di Fourier" che qui descriveremo sommariamente.

Prima di tutto è facile provare che il "sistema trigonometrico"

$$F := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.1}$$

è una famiglia ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$. Da Teorema 4.2 si ottiene allora che per ogni $f \in L^2(-\pi, \pi)$ la "serie di Fourier di f" definita come segue

$$\frac{1}{2\pi}(f, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi}(f, \cos nt) \cos nt + \frac{1}{\pi}(f, \sin nt) \sin nt \right] \tag{4.2}$$

converge incondizionatamente in $L^2(-\pi, \pi)$.

In realtà l'insieme F definito in (4.1) è una famiglia ortonormale completa. Si può dimostrare questo fatto utilizzando i seguenti due risultati di approssimazione, che enunciamo soltanto. Il primo è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass [**7**], mentre il secondo si ottiene per regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione [**1**, Corollario IV.23].

Teorema 4.3. *Sia* $\varphi \in C(K)$*, con* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$*. Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tale che* $\sup_K |\varphi - P| \leq \varepsilon$*.*

Teorema 4.4. *Lo spazio vettoriale* $C_0(-\pi, \pi)$ *è denso in* $(L^2(-\pi, \pi)\,, \|\cdot\|_2)$*.*

Infatti, da Teorema 4.3 e Teorema 4.4 otteniamo:

COROLLARIO 4.1 (**). *Le combinazioni lineari finite di elementi del sistema trigonometrico (4.1) formano uno spazio vettoriale denso in* $(L^2(-\pi,\pi)\,,\,\|\cdot\|_2)$. *Quindi, per Osservazione 3.4, il sistema trigonometrico è una famiglia ortonormale completa.*

Da Corollario 4.1 e Teorema 4.2(3) segue ora subito il seguente risultato.

COROLLARIO 4.2 (°). *Per ogni* $f \in L^2(-\pi,\pi)$*, la serie di Fourier (4.2) converge incondizionatamente a* f *in* $(L^2(-\pi,\pi)\,,\,\|\cdot\|_2)$.

Combinando Corollario 4.2 e Proposizione 1.1, otteniamo:

COROLLARIO 4.3 (°). *Se* $f \in L^2(-\pi,\pi)$*, allora esiste una sottosuccessione di*

$$S_N(t) := \frac{1}{2\pi}(f,1) + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}(f,\cos nt)\cos nt + \frac{1}{\pi}(f,\sin nt)\sin nt\right] \tag{4.3}$$

che converge puntualmente quasi ovunque in $(-\pi,\pi)$.

OSSERVAZIONE 4.1. Nel 1915 Lusin pose la questione della convergenza quasi ovunque di "tutta" la successione (4.3). La risposta affermativa venne oltre cinquant'anni dopo, in un profondo lavoro di Lennart Carleson [**2**].

Bibliography

[1] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.
[2] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. **116**, 135-157 (1966).
[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.
[4] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.
[5] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995.
[6] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass_theorem