Analisi Funzionale (a.a. 2011/12)
DIARIO

Silvano Delladio

March 22, 2012

Contents

CHAPTER 1

Complementi di teoria della misura

[* Prima settimana (20/02/2012); 3 *]

1. Misure esterne metriche, gli esempi di $\mathcal{L}^n$ e $\mathcal{H}^s$

DEFINIZIONE 1.1. *Una misura esterna su uno spazio metrico (X,d) è detta "di Carathéodory" (o anche "metrica") se*

$$\varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A,B\in 2^X$ tale che

$$\mathit{dist}\,(A,B):=\inf\{d(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}>0.$$

TEOREMA 1.1 (***). *Sia φ una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico (X,d). Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.*

OSSERVAZIONE 1.1. Si può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema 1.1: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X,d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([**7**, Theorem 1.7]).

PROPOSIZIONE 1.1 ([**1**]). *Sia dato $\mathcal{I}\subset 2^X$ e indichiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia delle σ-algebre in X contenenti $\mathcal{I}$. Allora*

$$\Sigma(\mathcal{I}):=\cap_{\Sigma\in\mathcal{A}}\Sigma$$

è una σ-algebra in X. Essa è detta "la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$".

PROPOSIZIONE 1.2 (**). *Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di X. Allora:*

(1) *Si ha $\Sigma(\mathcal{F})=\Sigma(\mathcal{G})$;*
(2) *Se X è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione $\Sigma(\mathcal{K})\subset\Sigma(\mathcal{F})$;*
(3) *Se (X,d) è uno spazio metrico separabile, si ha $\Sigma(\mathcal{K})=\Sigma(\mathcal{G})$.*

OSSERVAZIONE 1.2. In uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che $\Sigma(\mathcal{K})\neq\Sigma(\mathcal{F})=\Sigma(\mathcal{G})$. Si consideri per esempio $[0,1]$ con la topologia discreta e cioè $\mathcal{G}=2^{[0,1]}$. Osserviamo che $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $[0,1]$. Se consideriamo la σ-algebra

$$\Sigma_0:=\{E\in 2^X\,|\,\#(E)\le\aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c)\le\aleph_0\}$$

si ha $\Sigma(\mathcal{K})\subset\Sigma_0\subset 2^{[0,1]}$. Inoltre, evidentemente, vale $\Sigma_0\neq 2^{[0,1]}=\mathcal{G}=\Sigma(\mathcal{G})$.

Definizione 1.2. *Siano X uno spazio topologico, φ una misura esterna su X e $\mathcal{M}_\varphi$ la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a φ. Allora:*

(i) *La σ-algebra $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ viene indicata con $\mathcal{B}(X)$ e i suoi elementi sono detti "insiemi boreliani";*
(ii) *φ è detta "boreliana" (oppure "di Borel") se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$;*
(iii) *φ è detta "Borel regolare" se è boreliana e se inoltre per ogni insieme $A \in 2^X$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $B \supset A$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$;*
(iv) *φ è detta "di Radon" se è Borel regolare e se $\varphi(K) < \infty$ per ogni insieme compatto K in X.*

Da Teorema 1.1 segue subito il seguente risultato.

Corollario 1.1 (°). *Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è boreliana.*

Lemma 1.1 (°). *Consideriamo uno spazio topologico X e sia $\mathcal{D} \subset 2^X$ tale che:*

(i) *$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{D}$;*
(ii) *$\mathcal{D}$ è chiuso rispetto all'unione numerabile e rispetto all'intersezione numerabile.*

Allora $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D}$.

Teorema 1.2 (***). *Sia φ una misura esterna boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $B \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$.*

[* Seconda settimana (27/02/2012); 6 *]

Corollario 1.2. *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ e $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $E \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.3 ([**1**]). *Si consideri la funzione $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da*

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \Big\{ \sum_j v(I_j) \,\Big|\, \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \Big\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di E costituiti di intervalli aperti in $\mathbb{R}^n$, mentre $v(I_j)$ denota la misura elementare dell'intervallo I_j. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

TEOREMA 1.4 ([**1**]). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$;*
(2) *Se I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$;*
(3) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(E+\tau) = \mathcal{L}^n(E)$;*
(4) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$ si ha $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$.*

TEOREMA 1.5 (**). *La misura esterna di Lebesgue n-dimensionale è una misura esterna metrica ed è di Radon.*

ESEMPIO 1.1 (Esistenza di insiemi non misurabili). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0,1]$: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme E di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, poniamo infine

$$E_i := (E \cap [0, q_i] + 1 - q_i) \cup (E \cap (q_i, 1] - q_i).$$

Allora E non è misurabile. Se lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli E_i. Poiché questi sono a-due-a-due disgiunti e la loro unione è $[0,1]$ (osserviamo che, poiché 0 necessita di un "trattamento speciale", è più rapido, ancorché sufficiente, limitarsi a provare che $(0,1] \subset \cup_i E_i$), si giungerebbe all'assurdo:

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) = \mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i\Big) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

OSSERVAZIONE 1.3. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

OSSERVAZIONE 1.4. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^n$ ma non sono boreliani.

TEOREMA 1.6 ([**1**]). *Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, indichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dei ricoprimenti numerabili $\{C_j\}$ di E tali che $diam(C_j) \leq \delta$ per ogni j. Per $s \in [0, +\infty)$, poniamo anche*

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ definita da

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \,\middle|\, \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\}$$

è una misura esterna.

Teorema 1.7 ([**1**]). *Sia $s \in [0,+\infty)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ è monotona decrescente, quindi esiste*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,+\infty]$ è una misura esterna metrica.

Definizione 1.3. *$\mathcal{H}^s$ è detta "misura esterna di Hausdorff s-dimensionale".*

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema.

Teorema 1.8 ([**1**]). *Si ha:*

(1) *$\mathcal{H}^0 = \#$ (misura del conteggio);*
(2) *$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ (in $\mathbb{R}^n$);*
(3) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{H}^s(E+\tau) = \mathcal{H}^s(E)$;*
(4) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$ si ha $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$;*
(5) *Se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$, allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ per ogni $t > s$.*

Osservazione 1.5. Se $t > n$ si ha $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$.

Da Teorema 1.1 e Teorema 1.7 segue subito che $\mathcal{H}^s$ è boreliana. In realtà vale il seguente risultato più forte.

Teorema 1.9 (**). *La misura esterna di Hausdorff è una misura esterna Borel regolare, ma non di Radon (eccetto che per $s = n$).*

Come ci si aspetta vale il seguente risultato.

Teorema 1.10. *Nel contesto delle sottovarietà regolari, si ha:*

(1) *Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare, allora*

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a,b])) = \int_a^b \|\gamma'\|;$$

(2) *Se $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ è una superficie regolare, allora*

$$\mathcal{H}^2(\varphi(A)) = \int_A \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\| dsdt.$$

Esempio 1.2. Sia C l'insieme di Cantor. Se esiste s tale che $\mathcal{H}^s(C) \in (0,+\infty)$ allora $s = \ln 2 / \ln 3$.

Definizione 1.4. *La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è il numero*

$$dim_H(E) := \inf\{s \in [0,+\infty) \,|\, \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Esempio 1.3. Se C è una curva regolare (in $\mathbb{R}^n$), allora $\dim_H(C) = 1$. Se S è una superficie regolare (in $\mathbb{R}^n$), allora $\dim_H(S) = 2$. L'insieme di Cantor ha dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2/\ln 3$ (sketch-proof da Esempio 1.2, per una dimostrazione completa vedasi [**5**, Theorem 1.14]).

Osservazione 1.6. La "misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$, per semplicità sono solitamente indicate con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$ rispettivamente.

[* Terza settimana (05/03/2012); 9 *]

2. Funzioni misurabili
Il Teorema di Egoroff e il Teorema di Lusin

Teorema 2.1 (Egoroff (**)). *Siano dati:*

(i) *uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che $\mu(X) < +\infty$;*
(ii) *una successione di funzioni misurabili $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(j = 1, 2, \dots)$ che converge puntualmente quasi ovunque a $f : X \to \mathbb{R}$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(X - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e f_j converge a f uniformemente in A_ε.

Osservazione 2.1. Il Teorema 2.1 non vale (in generale) se $\mu(X) = +\infty$, nemmeno nel caso speciale della σ-finitezza. Per esempio, consideriamo $[0, +\infty)$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1 \llcorner [0, +\infty)$ e sia

$$f_k(x) := \frac{x}{k}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si ha che f_k converge puntualmente alla funzione identicamente nulla. Allora, se fosse vero il Teorema di Egoroff, si giungerebbe alla conclusione assurda che f_k converge uniformemente a zero su un insieme illimitato.

Osservazione 2.2. In generale, il teorema di Egoroff può non valere se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Si consideri per esempio $X = (0, 1)$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1 \llcorner (0, 1)$ e $f_j \equiv j$. Allora f_j converge puntualmente a $+\infty$, ma evidentemente la tesi di Teorema 2.1 non vale.

Teorema 2.2 ([**1**]). *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$. Allora esiste una successione di funzioni semplici e misurabili $s_j : X \to \mathbb{R}$ tali che $0 \leq s_j \leq s_{j+1} \leq f$ e s_j converge puntualmente a f. Inoltre, se f è limitata la convergenza è uniforme.*

Definizione 2.1. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura tale che X sia anche uno spazio topologico e si abbia $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Allora una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice "quasi continua" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso F di X tale che $\mu(X - F) \leq \varepsilon$ e $f|F$ è continua.*

Teorema 2.3 (Lusin (***)). *Sia dato uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *con* $\mu(X) < +\infty$ *e tale che:*

(i) X *è uno spazio topologico e* $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$*;*
(ii) *per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un sottoinsieme chiuso* F *di* A *soddisfacente* $\mu(A - F) \leq \varepsilon$.

Allora ogni funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ *è quasi continua.*

Ricordando Corollario 1.2, si ottiene subito il seguente risultato.

Corollario 2.1 (°). *Sia* φ *una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico* (X, d) *tale che* $\varphi(X) < +\infty$. *Allora ogni funzione misurabile* $f : X \to \mathbb{R}$ *è quasi continua.*

CHAPTER 2

Spazi L^p e Teorema di Radon-Nikodym.

[* Quarta settimana (12/03/2012); 12 *]

1. Spazi L^p.

DEFINIZIONE 1.1. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Allora $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto "maggiorante essenziale" di f se vale $f(x) \le M$ quasi ovunque rispetto a μ. L'insieme dei maggioranti essenziali di f è indicato con $\mathcal{M}_f$.*

OSSERVAZIONE 1.1. Nelle ipotesi di Definizione 1.1, si ha evidentemente $\mathcal{M}_f \ni +\infty$. Anzi, precisamente, si ha

$$\mathcal{M}_f = \{+\infty\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{M}_f \text{ è una semiretta destra chiusa.}$$

Infatti, se $\mathcal{M}_f \neq \{+\infty\}$ si ha certamente, prima di tutto, che $\mathcal{M}_f$ è una semiretta destra. Per verificare la chiusura, consideriamo una successione m_j decrescente tale che $m_j \to \inf \mathcal{M}_f$. Posto

$$E_j := \{x \in X \mid f(x) > m_j\} \in \mathcal{A}$$

osserviamo che (per ogni j)

$$\mu(E_j) = 0, \qquad E_j \subset E_{j+1}.$$

Ne viene che

$$\mu\left(\cup_j E_j\right) = \lim_j \mu(E_j) = 0.$$

Ma

$$\cup_j E_j = \{x \in X \mid f(x) > \inf \mathcal{M}_f\}$$

e quindi $\inf \mathcal{M}_f \in \mathcal{M}_f$.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Se $p \in [1, +\infty]$, con $L^p(X)$ indicheremo la classe delle funzioni misurabili $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\|f\|_p < \infty$, dove*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} & \textit{se } 1 \le p < +\infty, \\ \min \mathcal{M}_{|f|} & \textit{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Nel corso della dimostrazione della sottostante disuguaglianza di Hölder si usa il seguente semplice risultato.

PROPOSIZIONE 1.1 ([**1**]). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Inoltre sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione misurabile tale che* $f \geq 0$ *quasi ovunque rispetto a* μ *e soddisfacente*

$$\int f d\mu = 0.$$

Allora $f = 0$ *quasi ovunque rispetto a* μ.

TEOREMA 1.1 (Disuguaglianza di Hölder (**)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e siano* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni misurabili. Allora*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove $p, p' \in [1, +\infty]$ *sono coniugati, cioè tali che* $p = 1$ *e* $p' = +\infty$ *(o viceversa) oppure*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad (\textit{con } p, p' \in (1, +\infty)).$$

TEOREMA 1.2 (*). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura,* $p \in [1, +\infty]$ *e* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile. Allora*

(1) $\|f\|_p \geq 0$;
(2) $\|f\|_p = 0$ *se e solo se* $f = 0$ *quasi ovunque (rispetto a* μ*);*
(3) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$*, per ogni* $c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 1.3 (**). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$*. Allora* $L^p(X)$ *è uno spazio vettoriale e vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textit{Disuguaglianza di Minkowski})$$

per ogni $f, g \in L^p(X)$.

OSSERVAZIONE 1.2. Facendo il quoziente di $L^p(X)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o.}$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale che, per semplicità, continueremo a indicare con la notazione $L^p(X)$. La funzione che associa a una classe di equivalenza F il numero $\|f\|_p$, dove f è un rappresentante qualsiasi di F, definisce una norma sul quoziente $L^p(X)$. Sempre per semplicità, non indicheremo mai tale norma di F con notazioni del tipo $\|F\|$ ma scriveremo piuttosto $\|f\|_p$.

TEOREMA 1.4 (Fisher-Riesz (***)). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$*. Allora lo spazio vettoriale normato* $L^p(X)$ *è uno spazio di Banach.*

[* Quinta settimana (19/03/2012); 15 *]

Dalla dimostrazione di Teorema 1.4 segue subito il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.2 (°). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$*. Allora ogni successione convergente in* $L^p(X)$ *ha una sottosuccessione convergente q.o.*

Osservazione 1.3. In generale una successione convergente in $L^p(X)$ non converge q.o. Esempio.

Esempio 1.1. Consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, dove μ indica la misura del conteggio. Se $p \in [1, +\infty]$, indichiamo con l_p la famiglia delle successioni $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ tali che $\|\{a_j\}\|_{l_p} < +\infty$, dove

$$\|\{a_j\}\|_{l_p} := \begin{cases} \left(\sum_j |a_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_j |a_j| & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Allora $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ è uno spazio normato isometrico a $L^p(\mathbb{N})$ e quindi è anche completo.

Definizione 1.3. *Sia X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Allora una funzione $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta "misura con segno" se sono verificare le seguenti proprietà:*

(i) *ν assume al più uno soltanto dei valori $+\infty$ e $-\infty$;*
(ii) *$\nu(\emptyset) = 0$;*
(iii) *Se $\{A_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti, allora si ha $\nu(\cup_j A_j) = \sum_j \nu(A_j)$, dove le due serie*

$$\sum_j \nu(A_j) \vee 0, \qquad \sum_j (-\nu(A_j)) \vee 0$$

non divergono mai contemporaneamente;

La terna $(X, \mathcal{A}, \nu)$ è detta "spazio con misura con segno". Inoltre si dice che un insieme $A \in \mathcal{A}$ è "positivo (risp. negativo) [risp. nullo] per ν" se $\nu(E) \geq 0$ (risp. $\nu(E) \leq 0$) [risp. $\nu(E) = 0$] per ogni $E \in \mathcal{A}$ tale che $E \subset A$:

Osservazione 1.4. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile tale che almeno una di $f \vee 0$ e $(-f) \vee 0$ sia sommabile. Allora

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

definisce una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ (Definizione 1.4). Osserviamo che $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ è un insieme positivo per ν, mentre $\{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$ è un insieme negativo per ν. L'insieme $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ è nullo per ν. Sorge spontaneamente la seguente questione: se ν è una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ, allora è vero che ν si può rappresentare nella forma integrale (1.1)? Ebbene, a tale questione risponde affermativamente il teorema di Radon Nikodym (Teorema 2.1) che proveremo presto. Le proposizioni che seguono serviranno per dimostrare questo importante risultato.

Lemma 1.1 (**). *Consideriamo uno spazio con misura con segno $(X, \mathcal{A}, \nu)$ e $E \in \mathcal{A}$ tale che $\nu(E) \in (0, +\infty)$. Allora esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $A \subset E$, A è positivo e $\nu(A) > 0$.*

[* Sesta settimana (26/03/2012); 18 *]

Teorema 1.5 (Decomposizione di Hahn (***)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \nu)$ uno spazio con misura con segno. Allora esistono $P, N \in \mathcal{A}$ disgiunti e tali che P è positivo per ν, N è negativo per ν e $X = P \cup N$.*

Osservazione 1.5. Se c'è un insieme non vuoto e nullo per ν, allora esistono più decomposizioni di Hahn.

Definizione 1.4. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X.*

(1) *Se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una misura con segno, allora si dice che "ν è assolutamente continua rispetto a μ" se $\nu(A) = 0$ ogni volta che $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) = 0$. In tal caso si scrive $\nu << \mu$.*

(2) *Se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ sono misure, allora si dice che "μ_1 e μ_2 sono mutuamente singolari" se esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu_1(A) = 0$ e $\mu_2(X - A) = 0$. In tal caso si scrive $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Teorema 1.6 (Decomposizione di Jordan (**)). *Dato uno spazio con misura con segno $(X, \mathcal{A}, \nu)$, esiste una ed una sola coppia di misure mutuamente singolari ν^+ e ν^- tale che:*

(i) *almeno una di esse è finita;*
(ii) *vale $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.*

La misura $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ è detta "variazione totale di ν".

Proposizione 1.3 (*). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una misura con segno. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$\nu << \mu$;*
(2) *$|\nu| << \mu$;*
(3) *$\nu^+ << \mu$ e $\nu^- << \mu$.*

Teorema 1.7 (**). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una misura con segno (nota bene: ν è finita!). Allora $\nu << \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mu(E) \leq \delta$ implica $|\nu(E)| \leq \varepsilon$.*

2. Il Teorema di Radon-Nikodym.

Definizione 2.1. *Siano X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Una "partizione (misurabile di X)" è una famiglia finita $\mathcal{P} : \{A_1, \ldots, A_m\}$ di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti tali che $\cup_i A_i = X$. Una partizione $\mathcal{P}'$ è detta "raffinamento" di $\mathcal{P}$ se per ogni $A' \in \mathcal{P}'$ esiste $A \in \mathcal{P}$ tale che $A' \subset A$.*

Lemma 2.1 (**). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X e $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ due misure (nota bene: λ, μ sono finite) tali che $\lambda(A) \leq \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Sia $\mathcal{P} =$*

$\{A_1, \dots, A_m\}$ *una partizione misurabile di* X *e sia* $\mathcal{P}'$ *un raffinamento di* $\mathcal{P}$*. Poniamo*

$$h_{\mathcal{P}} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} \varphi_{A_i}$$

dove si assume la convenzione $\frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} := 0$ *se* $\mu(A_i) = 0$*. Analogamente definiamo* $h_{\mathcal{P}'}$*. Allora, per ogni* $A \in \mathcal{P}$ *si ha*

$$\lambda(A) = \int_A h_{\mathcal{P}} \, d\mu = \int_A h_{\mathcal{P}'} \, d\mu$$

e

$$\int_A h_{\mathcal{P}'}^2 \, d\mu - \int_A h_{\mathcal{P}}^2 \, d\mu = \int_A (h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}})^2 \, d\mu \geq 0.$$

Teorema 2.1 (Radon-Nikodym "piccolo" (***)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura tale che* $\mu(X) < +\infty$ *e sia* λ *una misura su* $\mathcal{A}$ *tale che* $\lambda(A) \leq \mu(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$*. Allora esiste una funzione misurabile* $f : X \to [0, 1]$ *tale che*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ *(nota bene:* f *è sommabile!). Inoltre, se* $g : X \to [0, +\infty]$ *è una funzione misurabile, si ha*

$$\int_X g \, d\lambda = \int_X g f \, d\mu.$$

Teorema 2.2 (Radon-Nikodym (***)). *Siano dati uno spazio con misura* σ*-finita* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una misura con segno* σ*-finita* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $\nu << \mu$*. Allora esiste una funzione misurabile* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che almeno una di* $f \vee 0$ *e* $(-f) \vee 0$ *sia sommabile (quindi* f *è integrabile) e vale*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$*. Tale funzione* f *è chiamata "la derivata di Radon-Nikodym di* ν *rispetto a* μ*" e si denota col simbolo* $\frac{d\nu}{d\mu}$*.*

Bibliography

[1] G. Anzellotti:Diario del corso di Analisi Matematica - III unitá didattica (A.A. 2010/2011)
[2] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.
[3] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. **116**, 135-157 (1966).
[4] L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.
[5] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.
[6] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995.
[7] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass_theorem