Note di
ANALISI MATEMATICA III
(per il Corso di Laurea in Fisica)
A.A. 2012/2013

Silvano Delladio

Contents

CHAPTER 1

Integrali di funzioni e campi

1. Introduzione

Presentazione generale del corso. Rassegna di "situazioni problematiche" relative al calcolo di:

(1.1) Lunghezza di una curva (nel piano o nello spazio);
(1.2) Massa di un filo;
(1.3) Lavoro compiuto da un campo lungo una curva orientata;
(2.1) Area di una superficie;
(2.2) Massa di una lamina;
(2.3) Flusso di un campo attraverso una supeficie orientata;
(3.1) Volume di un sottoinsieme dello spazio;
(3.2) Massa di un corpo;
(4.1) Area di un sottoinsieme del piano;
(4.2) Volume del sottografico di una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

In tutti i casi elencati il numero da calcolare si approssima mediante somme finite del tipo

$$\sum_i f(P_i)m(E_i) \tag{1}$$

dove $\{E_i\}$ è una partizione del luogo geometrico E coinvolto nella formulazione del problema (una curva per (1.1-3), una superficie per (2.1-3), eccetera), $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, $P_i \in E_i$ ed m è la misura naturale per gli E_i (lunghezza per 1.1-3, area per 2.1-3, eccetera). La partizione è scelta così fitta che le funzioni $f|E_i$ "si possono considerare costanti".

In particolare:

- $f \equiv 1$ in (1.1), (2.1), (3.1) e (4.1);
- f è la densità di massa in (1.2), (2.2) e (3.2);
- $f \equiv F \bullet \tau$ in (1.3), dove F è il campo che compie lavoro mentre τ è il campo di vettori unitari tangenti che orienta la curva;
- $f \equiv F \bullet \nu$ in (2.3), dove F è il campo di cui calcolare il flusso mentre ν è il campo di vettori normali continuo che orienta la superficie.

2. Integrale su una curva

Terminologie alternative: curva come mappa e sua immagine, oppure curva e sua parametrizzazione. Orientazione indotta dalla parametrizzazione.

Una curva ammette infinite parametrizzazioni. Esempi. Ogni curva liscia ammette parametrizzazioni non lisce. Inoltre esistono curve non lisce con parametrizzazioni lisce (esempio: $\gamma(t) := (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$).

Esempi di parametrizzazioni di curve (segmento, grafico di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, elica, ...). Definizioni di curva chiusa, curva semplice.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia data una mappa* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *e sia* $t_0 \in [a, b]$. *Allora il limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

esiste in $\mathbb{R}^n$ *se e solo se le componenti* γ_i *sono derivabili in* t_0. *In tal caso si ha*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che si ha

$$\left|\frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} - v_i\right| \le \left\|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v\right\| \le \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} - v_j\right|$$

per ogni $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e per $i = 1, \dots, n$. □

DEFINIZIONE 1.1. *Sia* γ *come in Proposizione 1.1. Diremo che* γ *è <u>derivabile</u> in* $t_0 \in [a, b]$ *se esiste*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Tale limite verrà indicato con $\gamma'(t_0)$.

Ora Proposizione 1.1 può essere riformulata come segue:

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia data* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *e sia* $t_0 \in [a, b]$. *Allora* γ *è derivabile in* t_0 *se e solo se tutte le componenti* γ_i *sono derivabili in* t_0. *In tal caso si ha*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

PROPOSIZIONE 1.3. *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una mappa derivabile in* t_0, *con* $\gamma'(t_0) \neq 0$, *e consideriamo la seguente parametrizzazione della retta per* $\gamma(t_0)$ *avente direzione* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\lambda_v(t) := \gamma(t_0) + (t - t_0)v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha allora che $\gamma(t) - \lambda_v(t)$ *è un infinitesimo di ordine superiore a* $t - t_0$, *per* $t \to t_0$, *se e soltanto se* $v = \gamma'(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti

$$\frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v.$$

Ne segue che

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\lambda_v(t)}{t-t_0} = 0$$

se e soltanto se $v = \gamma'(0)$. □

La precedente proposizione ci mostra che, fra tutte le λ_v, ce n'è una (e una sola) che meglio approssima γ vicino a t_0. Essa si ottiene prendendo $v = \gamma'(t_0)$. Risulta pertanto naturale dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.2. *Nelle ipotesi di Proposizione 1.3, la retta*

$$t \mapsto \lambda_{\gamma'(t_0)}(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0)$$

è detta retta tangente (affine) alla curva γ in t_0.

DEFINIZIONE 1.3. *Una mappa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta parametrizzazione regolare a tratti (di curva) se essa continua e se si può trovare una suddivisione*

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

tale che, per ogni j, la mappa $\gamma|(a_j, a_{j+1})$ sia iniettiva, di classe C^1 e

$$t \mapsto \gamma'(t), \qquad t \in (a_j, a_{j+1})$$

sia limitata e sempre diversa da zero. Nel caso in cui le precedenti condizioni possano essere verificate con $N = 1$, si dice che γ è una parametrizzazione regolare. Una curva regolare (risp. curva regolare a tratti) è un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ per cui esiste una parametrizzazione regolare (risp. regolare a tratti) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $C = \gamma([a,b])$.

PROPOSIZIONE 1.4. *Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione regolare (di curva) allora $\gamma((a,b))$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $t_0 \in (a,b)$. Poiché $(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0)) = \gamma'(t_0) \neq 0$, deve verificarsi almeno una delle seguenti due condizioni:

$$\gamma_1'(t_0) \neq 0, \qquad \gamma_2'(t_0) \neq 0.$$

Supponiamo che si verifichi la prima (se si verificasse la seconda, procederemmo analogamente) e poniamo

$$s_0 := \gamma_1(t_0), \qquad F(s,t) := s - \gamma_1(t)$$

con $(s,t) \in \mathbb{R} \times (a,b)$. Osserviamo che

$$F(s_0,t_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(s_0,t_0) = \gamma_1'(t_0) \neq 0.$$

Allora possiamo applicare il teorema della funzione implicita per trovare un intervallo aperto I, con $s_0 \in I \subset \gamma_1((a,b))$, e una funzione $\varphi \in C^1(I)$ tale che $\varphi(s_0) = t_0$, $J := \varphi(I) \subset (a,b)$ e

$$F(s, \varphi(s)) = 0, \text{ per ogni } s \in I$$

ossia

$$\gamma_1(\varphi(s)) = s, \text{ per ogni } s \in I.$$

Osserviamo che $t_0 \in J$ e che $\varphi : I \to J$ è biiettiva. Inoltre si può sempre supporre (restringendo I, se necessario) che J sia un intervallo aperto. Se poniamo

$$f(x) := \gamma_2(\varphi(x)), \qquad x \in I$$

si vede subito che $f \in C^1(I)$ e
$$(x, f(x)) = (\gamma_1(\varphi(x)), \gamma_2(\varphi(x))) = \gamma(\varphi(x))$$
per ogni $x \in I$. Allora $\gamma(J)$ coincide col grafico di f, il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 1.1. *La mappa $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, non è una parametrizzazione regolare in quanto $\gamma'(0) = (0, 0)$ (ma è regolare a tratti). Pertanto: il fatto che $\gamma((-1, 1))$ non possa coincidere, intorno al punto $\gamma(0) = (0, 0)$, col grafico di una funzione di classe C^1 non contrasta con Proposizione 1.4.*

Ulteriore commento al problema (1.2), discusso in Sez. 1. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ parametrizza il luogo C occupato dal filo ed f indica la densità di massa del filo medesimo, allora le somme finite (1) approssimano il numero

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{2}$$

Questa espressione diviene pertanto il "naturale candidato per la definizione di $\int_\gamma f$". Prima però essa andrà oppotunamente "testata": più precisamente verificheremo che la formula (2) produce una nozione di "massa" coerente, nei casi elementari (aste uniformi, matasse circolari, ...), con quella classica.

Definizione 1.4. *Siano date una parametrizzazione regolare a tratti (di curva) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e una funzione continua $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$. Allora si chiama "integrale di f su γ" il numero*
$$\int_\gamma f := \int_a^b (f \circ \gamma)\|\gamma'\|.$$
Il numero $\int_\gamma 1$ è detto "massa di γ".

Particolarmente interessante e' il caso in cui $\gamma|(a, b)$ sia iniettiva. Come naturale attendersi, vale il seguente teorema di indipendenza.

Proposizione 1.5. *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni regolari a tratti tali che*

(i) *$\gamma|(a, b)$ e $\lambda|(c, d)$ sono iniettive;*
(ii) *$\gamma([a, b]) = \lambda([c, d]) =: C$.*

Allora, se $f : C \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha
$$\int_\gamma f = \int_\lambda f.$$

DIMOSTRAZIONE (nell' ipotesi "ridotta" che γ e λ siano regolari e iniettive): Consideriamo la funzione
$$\sigma := \lambda^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to [c, d].$$
Osserviamo che σ è iniettiva, oltre che (ovviamente) suriettiva. Infatti, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, allora si ha
$$\gamma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_2) = \gamma(t_2)$$

e quindi $t_1 = t_2$, per l'iniettività di γ.

Verifichiamo che σ è continua. Se non lo fosse, esisterebbero $t_0 \in [a,b]$ e $\varepsilon_0 > 0$ tali che

$$|\sigma(t_i) - \sigma(t_0)| \geq \varepsilon_0 \tag{3}$$

per una certa successione di $t_i \in [a,b]$, $i = 1.2, \ldots$, con $t_i \to t_0$ $(i \to \infty)$. Poiché $[c,d]$ è un insieme compatto e $\sigma(t_i) \in [c,d]$, potremmo trovare una sottosuccessione $\{t_{i_j}\}$ e $s_0 \in [c,d]$ tali che

$$\sigma(t_{i_j}) \to s_0 \qquad (j \to \infty). \tag{4}$$

Ne seguirebbe che

$$\lambda(s_0) = \lim_j \lambda(\sigma(t_{i_j})) = \lim_j \gamma(t_{i_j}) = \gamma(t_0) = \lambda(\sigma(t_0))$$

e quindi $s_0 = \sigma(t_0)$, per l'iniettività di λ. Ma questo risultato contraddice evidentemente (3) e (4) e prova pertanto la continuità di σ.

Dimostriamo ora che $\sigma \in C^1(a,b)$. Fissato arbitrariamente $t_0 \in (a,b)$ e ricordando che σ è iniettiva, si trova

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} &= \frac{\lambda(\sigma(t_0+h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{h} \\ &= \frac{\lambda(\sigma(t_0+h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)} \cdot \frac{\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)}{h} \end{aligned} \tag{5}$$

per ogni $h \neq 0$ sufficientemente prossimo a zero (affinché $t_0 + h \in (a,b)$). Osserviamo che, grazie alla continuità di σ, si ha

$$R(h) := \frac{\lambda(\sigma(t_0+h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)} \to \lambda'(\sigma(t_0)) \neq 0 \tag{6}$$

per $h \to 0$. In particolare, per $|h|$ sufficientemente piccolo, vale

$$R(h) \neq 0$$

e dunque da (5) otteniamo subito (per $|h|$ sufficientemente piccolo)

$$\frac{\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)}{h} = \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} \bullet \frac{R(h)}{\|R(h)\|^2}.$$

Ricordando anche (6), ne segue che σ è derivabile in t_0 e si ha

$$\sigma'(t_0) = \frac{\gamma'(t_0) \bullet \lambda'(\sigma(t_0))}{\|\lambda'(\sigma(t_0))\|^2}.$$

Rimane così provato che $\sigma \in C^1(a,b)$.

Osserviamo che, a questo punto, sempre da (5) si deduce l'uguaglianza

$$\gamma'(t_0) = \lambda'(\sigma(t_0))\sigma'(t_0). \tag{7}$$

Dalla formula di integrazione per sostituzione, segue che

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt &= \int_{[a,b]} f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\sigma'(t)\|\,dt \\ &= \int_{[a,b]} f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\||\sigma'(t)|\,dt \\ &= \int_{[c,d]} f(\lambda(s))\|\lambda'(s)\|\,ds. \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 1.2. *La formula (7) estende la formula di derivazione per le funzioni composte dimostrata nei precedenti corsi di analisi. Essa costituisce un risultato standard del calcolo differenziale che ci sarà utile anche in seguito.*

A questo punto possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.5. *Siano C una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l' integrale di f su C è il numero*

$$\int_C f := \int_\gamma f = \int_a^b (f \circ \gamma) \, \|\gamma'\|$$

dove $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare a tratti tale che $\gamma|(a,b)$ sia iniettiva e $\gamma([a,b]) = C$. Per una tale curva si definisce anche la misura (lunghezza) di C come la massa di γ, e cioè:

$$m_1(C) := \int_C 1 = \int_a^b \|\gamma'\|.$$

Notazione alternativa: $\int_C f \, ds$, $\int_C f \, d\mathcal{H}^1$.

Osservazione 1.3. *Vari test significativi eseguiti su $\int_{[a,b]} \|\gamma'\|$ (i casi del segmento, della circonferenza e del grafico di una funzione $f \in C^1([a,b])$), l'invarianza rispetto alla traslazione e l'omogeneità rispetto all'omotetia confermano l'intuizione che $C \mapsto \int_C 1$ fornisca una nozione di misura (lunghezza) delle curve coerente con l'esperienza.*

Il seguente risultato, interessante di-per-sè, conferma ulteriormente l'opportunità della precedente definizione.

Proposizione 1.6. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione regolare a tratti. Allora*

$$\int_a^b \|\gamma'\| = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dove $\mathcal{P}([a,b])$ denota l'insieme delle partizioni di $[a,b]$

$$\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_N), \text{ con } t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b$$

mentre $l_\gamma(\Delta)$ indica la lunghezza della poligonale avente come vertici le immagini $\gamma(t_j)$ della partizione Δ, cioè

$$l_\gamma(\Delta) := \sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|.$$

DIMOSTRAZIONE: Primo passo: se γ è una parametrizzazione regolare. Posto

$$L := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dimostriamo che

$$L \le m_1(C). \tag{8}$$

Consideriamo $\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N) \in \mathcal{P}([a,b])$ e, fissato j con $0 \le j \le N-1$, definiamo il vettore unitario

$$u := \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, si trova che

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| &= u \bullet (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) = u \bullet \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} u \bullet \gamma'(t)\, dt \le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{9}$$

e quindi, sommando

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

dalla quale segue subito la disuguaglianza (8).

Per dimostrare il viceversa, scegliamo a', b' tali che

$$a < a' < b' < b$$

e osserviamo che γ' è uniformemente continua in $[a', b']$. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \le \varepsilon \tag{10}$$

per ogni $s, t \in [a', b']$ tali che $|t - s| \le \delta$. Se ora consideriamo una partizione

$$\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N) \in \mathcal{P}([a', b'])$$

tale che

$$t_{j+1} - t_j < \delta, \qquad (j = 0, \ldots, N-1)$$

segue che

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt &\le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_j)\| dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t_j)\| dt \\ &\le \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \|\gamma'(t_j)\|(t_{j+1} - t_j) \\ &\le \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| (t_{j+1} - t_j) + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|. \end{aligned}$$

Poiché, come mostreremo fra breve

$$\left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| \le n\varepsilon \tag{11}$$

si ottiene

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt \le (n+1)(t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

da cui, sommando

$$\int_{a'}^{b'} \|\gamma'(t)\| dt \le (n+1)(b' - a')\varepsilon + l_{\gamma|[a',b']}(\Delta) \le (n+1)(b-a)\varepsilon + L.$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue subito che

$$\int_{a'}^{b'} \|\gamma'\| \leq L$$

e cioè

$$\int_a^b \|\gamma'\| \leq L + \int_a^{a'} \|\gamma'\| + \int_{b'}^b \|\gamma'\| \leq L + (a' - a + b - b') \sup_{[a,b]} \|\gamma'\|.$$

Ricordando che $\|\gamma'\|$ è limitata e che a' e b' possono essere scelti arbitrariamente vicini ad a e b, rispettivamente, se ne conclude che

$$\int_a^b \|\gamma'\| \leq L.$$

Per dimostrare (11), basta applicare il teorema di Lagrange del valor medio alle componenti γ_i di γ. Esso ci garantisce l'esistenza di $s_{ij} \in (t_j, t_{j+1})$ tali che

$$\left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left| \gamma_i'(t_j) - \frac{\gamma_i(t_{j+1}) - \gamma_i(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \gamma_i'(t_j) - \gamma_i'(s_{ij}) \right|.$$

La disuguaglianza (11) segue ora subito da (10).

<u>Secondo passo: il caso generale.</u> Sia

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

una suddivisione di $[a, b]$ tale che

$$\gamma|(a_j, a_{j+1}) \in C^1$$

e $\gamma'(t) \neq 0$, per ogni $t \neq a_0, a_1, a_2, \ldots$

Grazie al primo passo, si ha

$$\int_a^b \|\gamma'\| = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[a_j, a_{j+1}]} \|\gamma'\| = \sum_{j=0}^{N-1} \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a_j, a_{j+1}])} l_{\gamma|[a_j, a_{j+1}]}(\Delta) =: \Sigma.$$

Rimane da verificare che

$$\Sigma = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

In effetti, se consideriamo

$$\Delta_j = \{t_{j0}, t_{j1}, \ldots, t_{jN_j}\} \in \mathcal{P}([a_j, a_{j+1}]), \qquad (j = 0, \ldots, N-1)$$

e osserviamo che

$$\Delta_* := \cup_{j=0}^{N-1} \Delta_j = \{t_{00}, \ldots, t_{0N_0} = t_{10}, \ldots, t_{1N_1} = t_{20}, \ldots\} \in \mathcal{P}([a, b]),$$

troviamo subito che

$$\sum_{j=0}^{N-1} l_{\gamma|(a_j, a_{j+1})}(\Delta_j) = l_\gamma(\Delta_*) \leq \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

Quindi, potendo far variare arbitrariamente le Δ_j in $\mathcal{P}([a_j, a_{j+1}])$, otteniamo

$$\Sigma \leq \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta (e quindi concludere), consideriamo $\Delta \in \mathcal{P}([a, b])$ e poniamo

$$\Delta_j := \{a_j\} \cup (\Delta \cap (a_j, a_{j+1})) \cup \{a_{j+1}\} \in \mathcal{P}([a_j, a_{j+1}]), \qquad (j = 0, \ldots, N-1).$$

Allora, per la disuguaglianza triangolare, segue facilmente che

$$l_\gamma(\Delta) \leq \sum_{j=0}^{N-1} l_\gamma(\Delta_j) \leq \Sigma.$$

La conclusione segue ora dall'arbitrarietà di $\Delta \in \mathcal{P}([a,b])$. $\square$

NOTA BENE: La definizione di integrale sottintesa (è la prima volta che la incontriamo!) nella formula (9) è la seguente:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)dt := \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_1'(t)dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_2'(t)dt, \dots , \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_n'(t)dt \right).$$

NOTA BENE: Se disponessimo del teorema di Lagrange del valor medio per i campi di vettori, potremmo applicarlo a γ per ottenere una dimostrazione più diretta di (11). Eviteremmo così di passare alle componenti scalari γ_i. Purtroppo però un tale teorema non vale. Per esempio $\lambda(t) := (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, soddisfa

$$\frac{\lambda(2\pi) - \lambda(0)}{2\pi - 0} = 0$$

mentre $\lambda'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$.

Osservazione 1.4. *Anche alla luce di Proposizione 1.6, si potrebbe essere indotti a pensare che l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedrali inscritte in una superficie "liscia" Σ possa essere assunto quale ragionevole definizione dell'area di Σ. Questo però non può essere vero! Infatti tale estremo superiore vale $+\infty$ per tutte le superfici lisce e curve. Il caso del cilindro: esempio di Schwarz.*

Definizione 1.6. *Una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^n$ è una coppia (C, τ) per cui valgono le seguenti proprietà:*

(i) *Esiste una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma|(a,b)$ sia iniettiva e $\gamma([a,b]) = C$;*
(ii) *$\tau : C \to \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori e vale*

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \tau(\gamma(t))$$

per ogni t in cui γ è derivabile.

Le seguenti osservazioni sono preliminari essenziali alla definizione di integrale di un campo vettoriale su una curva regolare a tratti orientata (Definizione 1.7).

Osservazione 1.5. *Se (C, τ) è una curva regolare a tratti orientata, allora τ è continuo sui tratti regolari della curva C.*

Osservazione 1.6. *La Definizione 1.5 si estende in modo ovvio alle funzioni discontinue in un numero finito di punti e limitate (e.g. quelle continue e limitate sui tratti regolari della curva C).*

Definizione 1.7. *Sia $\overline{C} = (C, \tau)$ una curva regolare a tratti orientata (in $\mathbb{R}^n$). Se $F : C \to \mathbb{R}^n$ è un campo continuo sui tratti regolari di C, definiamo l'integrale di F su $\overline{C}$ come il numero*

$$\int_{\overline{C}} F := \int_C F \bullet \tau.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overline{C}} F \bullet ds$ *(per* $n = 2, 3$*),* $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy$ *(se* $n = 2$*),* $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ *(se* $n = 3$*).*

Osservazione 1.7. *Sia* $\overline{C} = (C, \tau)$ *una curva regolare a tratti orientata (in* $\mathbb{R}^n$*). Allora, se* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è come in Definizione 1.6, si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C}} F \bullet \tau = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \tau(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt. \tag{12}$$

Questa formula giustifica evidentemente l'uso delle notazioni alternative.

Osservazione 1.8. *Sia* A *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $F : A \to \mathbb{R}^n$ *un campo continuo dotato di un "potenziale"* $\varphi \in C^1(A)$ *(cioè si abbia* $\nabla\varphi \equiv F$*). Inoltre sia* $\overline{C} = (C, \tau)$ *una curva regolare a tratti orientata (in* $\mathbb{R}^n$*), con* $C \subset A$*. Allora, per (12) e per il teorema fondamentale del calcolo, si ha*

$$\begin{aligned} \int_{\overline{C}} F &= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)' = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\varphi \circ \gamma)' \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[(\varphi \circ \gamma)(a_{i+1}) - (\varphi \circ \gamma)(a_i)\right] = (\varphi \circ \gamma)(a_N) - (\varphi \circ \gamma)(a_0) \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \end{aligned} \tag{13}$$

dove $\{a_i\}$ *è la partizione di Definizione 1.3. In particolare, ne consegue che:*

(1) *Curve regolari a tratti orientate* $\overline{C}$*, distinte, aventi in comune i punti iniziale e finale danno luogo allo stesso valore dell'integrale* $\int_{\overline{C}} F$*;*
(2) *Per ogni curva regolare a tratti orientata chiusa* $\overline{C}$*, si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = 0.$$

Con riferimento al contesto fisico, in cui $\int_{\overline{C}} F$ *può essere interpretato come energia, diremo che i campi soddisfacenti questa condizione (come* F*) sono "conservativi". Abbiamo così verificato che ogni campo dotato di un potenziale è conservativo. Il viceversa è vero, ma la dimostrazione (che richiede strumenti matematici non ancora disponibili) verrà data in seguito.*

Osserviamo anche che se F *è di classe* C^1*, allora* φ *e di classe* C^2 *e quindi (per il teorema di Schwarz) si ha:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}. \tag{14}$$

A questo punto è facile provare l'esistenza di campi non dotati di potenziale. Per esempio, consideriamo

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto (0, x).$$

Dato che (14) non è soddisfatta, F *non può avere un potenziale. Alternativamente, grazie a (ii), tale fatto si può provare osservando che esistono curve chiuse sulle quali l'integrale di* F *produce un risultato diverso da zero (per esempio la circonferenza unitaria centrata nell'origine). In virtù di queste considerazioni, risulta piuttosto sorprendente il seguente risultato dovuto a Giovanni Alberti* [**1**]*:*

> *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un sottoinsieme aperto B di A e una funzione $\varphi \in C^1(A)$ tali che $\mathcal{L}^n(B) \leq \varepsilon$ e $\nabla\varphi(x) = F(x)$ per ogni $x \in A \backslash B$.*

Osserviamo infine che se F ha un potenziale φ, allora ne ha infiniti altri (per esempio $\varphi + c$, con $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$).

Esempi.

3. Integrale in $\mathbb{R}^n$

Intervalli aperti a destra in $\mathbb{R}^n$. Funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1.8. *Due funzioni semplici*

$$\varphi := \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}, \qquad \psi := \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j}$$

si dicono <u>uguali</u> (e si scrive $\varphi = \psi$) se esiste una biiezione $\sigma : \{1, \dots, M\} \to \{1, \dots, N\}$ tale che

$$D_i = E_{\sigma(i)}, \quad \lambda_i = \mu_{\sigma(i)}.$$

per ogni $i \in \{1, \dots, M\}$. Osserviamo che in tal caso si ha $M = N$. Le funzioni φ e ψ si dicono <u>equivalenti</u> (e si scrive $\varphi \sim \psi$) se $\varphi(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 1.9. *Sia D un intervallo aperto a destra in $\mathbb{R}^n$. Allora $\varphi_D + \varphi_D$ è equivalente ma non uguale a $2\varphi_D$.*

OSSERVAZIONE 1.10. *Se φ è una funzione semplice in $\mathbb{R}^n$, esistono infinite funzioni semplici ψ in $\mathbb{R}^n$ equivalenti a φ. Esempio: le funzioni semplici in $\mathbb{R}^2$*

$$\varphi_{[0,2)\times[0,1)}, \qquad \varphi_{[0,1)\times[0,1)} + \varphi_{[1,2)\times[0,1)} \tag{15}$$

sono equivalenti (e inoltre non sono uguali).

OSSERVAZIONE 1.11. *Si potrebbe esser portati a pensare che se*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j}$$

sono funzioni semplici equivalenti, con $\lambda_i \neq 0$ per ogni i e $\mu_j \neq 0$ per ogni j, allora debba valere $\cup_i D_i = \cup_j E_j$. Non è così! Per esempio (con $n = 2$), se poniamo

$$D_1 := [0,2) \times [0,1), \quad D_2 := [1,3) \times [0,1), \quad E_1 := [0,1) \times [0,1), \quad E_2 := [2,3) \times [0,1)$$

si ha ovviamente

$$\varphi_{D_1} - \varphi_{D_2} \sim \varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}$$

mentre

$$D_1 \cup D_2 \neq E_1 \cup E_2.$$

Osservazione 1.12. *Il funzionale sulle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ definito da*

$$I_n\Big(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{D_j}\Big) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_n(D_j)$$

produce lo stesso risultato se applicato a funzioni semplici equivalenti. Questo fatto, che proveremo fra poco (Proposizione 1.9) non accade per tutti i funzionali. Per esempio, il funzionale

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{D_j} \mapsto \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_n(D_j)^2$$

valutato sulle funzioni semplici (15), produce 4 e 2, rispettivamente. Osserviamo che $I_n(\varphi)$ si può interpretare intuitivamente come la misura orientata della regione compresa fra $\mathbb{R}^n$ e il grafico di φ. Dunque, senza ambiguità, potremo chiamere tale numero integrale di φ in $\mathbb{R}^n$. Tale interpretazione fornisce anche una prova intuitiva di Proposizione 1.9.

Osservazione 1.13. *Nell'insieme delle funzioni semplici (in $\mathbb{R}^n$) si può assumere come operazione di somma la consueta operazione di somma delle funzioni. Inoltre si può definire la seguente operazione di moltiplicazione per uno scalare:*

$$\alpha \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i} := \sum_{i=1}^{M} (\alpha\lambda_i) \varphi_{D_i}.$$

Se φ, ψ sono funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha evidentemente

$$I_n(\varphi + \psi) = I_n(\varphi) + I_n(\psi), \qquad I_n(\alpha\varphi) = \alpha I_n(\varphi).$$

La seguente osservazione e la successiva proposizione si riveleranno utili per provare la menzionata Proposizione 1.9 sull'invarianza dell'integrale per funzioni semplici equivalenti.

Osservazione 1.14. *Sia $\{D_i\}_{i=1}^M$ una qualsiasi famiglia di intervalli aperti a destra. Allora esiste una famiglia $\{F_k\}_{k=1}^P$ di intervalli aperti a destra tali che*

(i) *$F_h \cap F_k = \emptyset$ se $h \neq k$;*
(ii) *$\cup_k F_k = \cup_i D_i$;*
(iii) *Se $F_k \cap D_i \neq \emptyset$ allora $F_k \subset D_i$.*

Riassumeremo queste proprietà nella scrittura $\{F_k\}_{k=1}^P \lhd \{D_i\}_{i=1}^M$.

Proposizione 1.7. *Siano dati una fuzione semplice (in $\mathbb{R}^n$)*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}$$

e una famiglia $\{F_k\}_{k=1}^P$ di intervalli aperti a destra tale che

$$\{F_k\}_{k=1}^P \lhd \{D_i\}_{i=1}^M.$$

Posto

$$\Im_k := \{i \in \{1, \dots, M\} \mid F_k \subset D_i\}, \quad \gamma_k := \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \qquad (k = 1, \dots, P)$$

e

$$\zeta := \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \varphi_{F_k},$$

si ha

$$\zeta \sim \varphi, \qquad I_n(\zeta) = I_n(\varphi).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia

$$\Gamma := \{(k,i) \,|\, k = 1,\dots,P;\ i = 1,\dots,M;\ F_k \subset D_i\}$$

e osserviamo che $\Im_k$ è la sezione verticale di Γ di ascissa k, cioè

$$\Im_k = \{i \in \{1,\dots,M\} \,|\, (k,i) \in \Gamma\}.$$

Indicata con $\Re_i$ la sezione orizzontale di Γ $(i = 1,\dots,M)$, ossia posto

$$\Re_i := \{k \in \{1,\dots,P\} \,|\, (k,i) \in \Gamma\} = \{k \in \{1,\dots,P\} \,|\, F_k \subset D_i\}.$$

Verifichiamo che $\varphi \sim \zeta$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, \varphi_{D_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \sum_{k \in \Re_i} \varphi_{F_k}(x) = \sum_{(k,i)\in\Gamma} \lambda_i \varphi_{F_k}(x) = \sum_{k=1}^{P} \varphi_{F_k}(x) \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \\
&= \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \, \varphi_{F_k}(x) \\
&= \zeta(x).
\end{aligned}$$

In virtù dello stesso argomento, si prova anche che $I_n(\varphi) = I_n(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
I_n(\varphi) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, m_n(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \sum_{k \in \Re_i} m_n(F_k) = \sum_{(k,i)\in\Gamma} \lambda_i m_n(F_k) = \sum_{k=1}^{P} m_n(F_k) \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \\
&= \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \, m_n(F_k) \\
&= I_n(\zeta).
\end{aligned}$$

$\square$

Il seguente risultato stabilisce che I_n è un operatore monotono.

PROPOSIZIONE 1.8. *Se φ, ψ sono funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi \le \psi$ (i.e. $\varphi(x) \le \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$), allora $I_n(\varphi) \le I_n(\psi)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia
$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j}.$$
Allora
$$\widetilde{\varphi} := \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i} + \sum_{j=1}^{N} 0\varphi_{E_j} \sim \varphi, \qquad \widetilde{\psi} := \sum_{i=1}^{M} 0\varphi_{D_i} + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j} \sim \psi.$$
Applicando Osservazione 1.14, possiamo trovare una famiglia $\{F_k\}_{k=1}^P$ di intervalli aperti a destra tale che
$$\{F_k\}_{k=1}^P \lhd \{D_i\}_{i=1}^M \cup \{E_j\}_{j=1}^N.$$
Grazie a Proposizione 1.7, esistono due set di costanti $\{\alpha_k | k = 1, \dots, P\}$ e $\{\beta_k | k = 1, \dots, P\}$ tali che
$$\zeta := \sum_{k=1}^{P} \alpha_k \varphi_{F_k} \sim \widetilde{\varphi}, \qquad \zeta' := \sum_{k=1}^{P} \beta_k \varphi_{F_k} \sim \widetilde{\psi}$$
e
$$I_n(\zeta) = I_n(\widetilde{\varphi}) = I_n(\varphi), \qquad I_n(\zeta') = I_n(\widetilde{\psi}) = I_n(\psi). \tag{16}$$
Inoltre, considerando $x \in F_h$, si ricava subito che
$$\alpha_h = \zeta(x) = \varphi(x) \leq \psi(x) = \zeta'(x) = \beta_h \qquad \text{(per ogni } h\text{)}$$
da cui segue $I_n(\zeta) \leq I_n(\zeta')$. Finalmente si conclude ricordando che vale (16). □

Come corollario di Proposizione 1.8, otteniamo subito il seguente teorema di invarianza.

PROPOSIZIONE 1.9. *Siano φ e ψ funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ tali $\varphi \sim \psi$. Allora $I_n(\varphi) = I_n(\psi)$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti l'ipotesi $\varphi \sim \psi$ equivale alla verifica simultanea delle due condizioni $\varphi \leq \psi$ e $\psi \leq \varphi$. Ma queste, grazie a Proposizione 1.8, implicano rispettivamente $I_n(\varphi) \leq I_n(\psi)$ e $I_n(\psi) \leq I_n(\varphi)$. □

OSSERVAZIONE 1.15. *L'insieme delle funzioni semplici con le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare, così com'è stato definito, non è ancora uno spazio vettoriale. Tale struttura può invece essere conferita alla famiglia delle classi di equivalenza di funzioni semplici rispetto alla relazione $\sim$. Per compiere questo ulteriore passaggio, prima di tutto indichiamo con Σ la famiglia delle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ e poniamo $\Gamma := \Sigma/\sim$. Definiamo poi le seguenti operazioni in Γ:*

- *Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $C \in \Gamma$, consideriamo una funzione semplice*
$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i} \in C$$
  e indichiamo con αC l'elemento di Γ a cui appartiene la funzione semplice $\sum_{i=1}^{M} (\alpha\lambda_i)\varphi_{D_i}$. Osserviamo che, grazie alla Proposizione 1.9, la classe αC non dipende dalla scelta di φ.
- *Dati $C, C' \in \Gamma$, consideriamo due funzioni semplici*
$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i} \in C, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j} \in C'$$

e indichiamo con $C+C'$ l'elemento di Γ a cui appartiene la funzione semplice $\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\varphi_{D_i}+\sum_{j=1}^{N}\mu_j\varphi_{E_j}$. Sempre grazie alla Proposizione 1.9, si ha che la classe $C+C'$ non dipende dalla scelta di φ e ψ.

Osserviamo anche che se definiamo $\widetilde{I}_n:\Gamma\to\mathbb{R}$ come segue

$$\widetilde{I}_n(C):=I_n(\varphi),\qquad C\in\Gamma$$

dove φ è una qualsiasi funzione semplice in C, allora la definizione è buona, grazie ancora a Proposizione 1.9. A questo punto si verifica facilmente che $\widetilde{I}_n$ è lineare, cioè vale l'uguaglianza

$$\widetilde{I}_n(\alpha C+\beta C')=\alpha\widetilde{I}_n(C)+\beta\widetilde{I}_n(C')$$

per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e per ogni $C,C'\in\Gamma$.

Sia ora $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

(P1) f è limitata;
(P2) f è nulla nel complementare di un insieme limitato.

Indichiamo con $\Sigma_-(f)$ l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi\le f$. Analogamente $\Sigma_+(f)$ è l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi\ge f$.

Osservazione 1.16. *Grazie alle ipotesi assunte su f, gli insiemi $\Sigma_-(f)$ e $\Sigma_+(f)$ risultano essere non vuoti. Si possono dunque definire i numeri reali*

$$I_n^-(f):=\sup\{I_n(\varphi)\mid\varphi\in\Sigma_-(f)\},\qquad I_n^+(f):=\inf\{I_n(\varphi)\mid\varphi\in\Sigma_+(f)\}$$

e naturalmente si ha

$$I_n^-(f)\le I_n^+(f).$$

Definizione 1.9. *Diremo che $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (nulla fuori di un insieme limitato e limitata) è integrabile secondo Riemann (o Riemann integrabile) se*

$$I_n^-(f)=I_n^+(f).$$

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n}f:=I_n^-(f)=I_n^+(f).$$

L'insieme di tali funzioni è indicato con $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

Notazione alternativa: $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx$, $\iint\ldots\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx_1dx_2\ldots dx_n$.

Osservazione 1.17. *Non tutte le funzioni che soddisfano (P1) e (P2) sono Riemann integrabili. Per esempio, se $n=1$ e indichiamo con f la funzione caratteristica di $\mathbf{Q}\cap[0,1)$, si trova subito che $I_1^-(f)=0$ e $I_1^+(f)=1$.*

Osservazione 1.18. *L'integrale su $\mathbb{R}^n$ estende l'operatore I_n dall'insieme delle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ a tutto $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Più precisamente: se φ è una funzione semplice in $\mathbb{R}^n$, allora $\varphi\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=I_n(\varphi).\tag{17}$$

Infatti, poiché $\varphi \in \Sigma_-(\varphi)$ *e* $\varphi \in \Sigma_+(\varphi)$*, si ha*

$$I_n^+(\varphi) = \inf\{I_n(\psi) \,|\, \psi \in \Sigma_+(\varphi)\} \le I_n(\varphi) \le \sup\{I_n(\psi) \,|\, \psi \in \Sigma_-(\varphi)\} = I_n^-(\varphi).$$

Dato che $I_n^+(\varphi) \ge I_n^-(\varphi)$*, se ne conclude che* φ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^n$ *e vale* (17).

PROPOSIZIONE 1.10. *L'insieme* $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$*, equipaggiato con le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare nel senso delle funzioni, è uno spazio vettoriale. Inoltre la mappa*

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f :$$

è lineare.

DIMOSTRAZIONE: Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Dimostriamo che allora

$$f + g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Infatti, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esistono

$$\varphi_- \in \Sigma_-(f), \quad \varphi_+ \in \Sigma_+(f), \quad \psi_- \in \Sigma_-(g), \quad \psi_+ \in \Sigma_+(g)$$

tali che

$$I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) \le \varepsilon, \qquad I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \le \varepsilon. \tag{18}$$

Ma

$$\varphi_- + \psi_- \in \Sigma_-(f+g), \qquad \varphi_+ + \psi_+ \in \Sigma_+(f+g)$$

e si ha

$$\begin{aligned} I_n(\varphi_+ + \psi_+) - I_n(\varphi_- + \psi_-) &= I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \\ &= I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\ &\le 2\varepsilon \end{aligned}$$

per (18). A maggior ragione dunque

$$I_n^+(f+g) - I_n^-(f+g) \le 2\varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che

$$I_n^-(f+g) = I_n^+(f+g)$$

e cioè che $f+g$ è Riemann integrabile. Inoltre, poiché

$$I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_-) = I_n(\varphi_- + \psi_-) \le \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) \le I_n(\varphi_+ + \psi_+) = I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+)$$

e

$$I_n(\varphi_-) \le \int_{\mathbb{R}^n} f \le I_n(\varphi_+), \qquad I_n(\psi_-) \le \int_{\mathbb{R}^n} g \le I_n(\psi_+)$$

si trova anche

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) \right| \le I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \le 2\varepsilon.$$

Invocando nuovamente l'arbitrarietà di ε, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = 0$$

ossia

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f+g)=\int_{\mathbb{R}^n}f+\int_{\mathbb{R}^n}g.$$

Procedendo in modo analogo, si prova che se $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ allora $\lambda f\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n}\lambda f=\lambda\int_{\mathbb{R}^n}f.$$

□

PROPOSIZIONE 1.11. *$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ è un reticolo rispetto alle operazioni di massimo e di minimo. In altri termini, se $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ allora si ha anche $f\wedge g, f\vee g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Dato che

$$f\wedge g=-((-f)\vee(-g))$$

sarà sufficiente dimostrare che

$$f\vee g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n). \tag{19}$$

Per farlo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon>0$ e consideriamo

$$\varphi_-\in\Sigma_-(f),\quad \varphi_+\in\Sigma_+(f),\quad \psi_-\in\Sigma_-(g),\quad \psi_+\in\Sigma_+(g)$$

tali che

$$I_n(\varphi_+)-I_n(\varphi_-)\le\varepsilon,\qquad I_n(\psi_+)-I_n(\psi_-)\le\varepsilon. \tag{20}$$

Ovviamente

$$\varphi_-\vee\psi_-\in\Sigma_-(f\vee g),\qquad \varphi_+\vee\psi_+\in\Sigma_+(f\vee g).$$

Inoltre, non è difficile verificare che

$$0\le(\varphi_+\vee\psi_+)\,-\,(\varphi_-\vee\psi_-)\le\varphi_+-\varphi_-\,+\,\psi_+-\psi_-. \tag{21}$$

Infatti:

- Se in un punto si ha $\varphi_+\ge\psi_+$ e $\varphi_-\ge\psi_-$, allora
$$(\varphi_+\vee\psi_+)\,-\,(\varphi_-\vee\psi_-)=\varphi_+-\varphi_-\le\varphi_+-\varphi_-\,+\,\psi_+-\psi_-;$$
- Se $\varphi_+\le\psi_+$ e $\varphi_-\le\psi_-$, allora
$$(\varphi_+\vee\psi_+)\,-\,(\varphi_-\vee\psi_-)=\psi_+-\psi_-\le\varphi_+-\varphi_-\,+\,\psi_+-\psi_-;$$
- Se $\varphi_+\ge\psi_+$ e $\varphi_-\le\psi_-$ (quindi anche $\varphi_-\le\psi_+$) , allora
$$\begin{aligned}(\varphi_+\vee\psi_+)\,-\,(\varphi_-\vee\psi_-)&=\varphi_+-\psi_-\le\varphi_+-\psi_-+\psi_+-\varphi_-\\&=\varphi_+-\varphi_-\,+\,\psi_+-\psi_-;\end{aligned}$$
- Se $\varphi_+\le\psi_+$ e $\varphi_-\ge\psi_-$ (quindi anche $\varphi_+\ge\psi_-$) , allora
$$\begin{aligned}(\varphi_+\vee\psi_+)\,-\,(\varphi_-\vee\psi_-)&=\psi_+-\varphi_-\le\psi_+-\varphi_-+\varphi_+-\psi_-\\&=\varphi_+-\varphi_-\,+\,\psi_+-\psi_-;\end{aligned}$$

Grazie alle proprietà di linearità e monotonia di cui gode l'operatore I_n, da (21) si ottiene subito

$$0 \leq I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-).$$

Da questa e da (20) troviamo subito che

$$I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq 2\varepsilon$$

e quindi, a maggior ragione, si ha

$$I_n^+(f \vee g) - I_n^-(f \vee g) \leq 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue ora la (19). □

Come facile conseguenza delle precedenti proposizioni otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 1.12. *Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

(1) *Se $f \geq g$, si ha $\int_{\mathbb{R}^n} f \geq \int_{\mathbb{R}^n} g$;*
(2) *$|f| \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \geq |\int_{\mathbb{R}^n} f|$.*

DIMOSTRAZIONE: Prima di tutto, Proposizione 1.10 implica che $f - g$ è Riemann integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f-g) = \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Dopodiché (1) segue subito notando che la funzione identicamente nulla appartiene a $\Sigma_-(f-g)$, quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f-g) = \sup_{\varphi \in \Sigma_-(f-g)} I_n(\varphi) \geq I_n(0) = 0.$$

Per dimostrare (2), osserviamo che

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0.$$

Proposizione 1.10 e Proposizione 1.11 garantiscono allora che $|f|$ è Riemann integrabile e, tenendo conto anche di (1), si trova

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f \vee 0 + f \wedge 0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 + \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \right| = \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 - \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 - f \wedge 0 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|. \end{aligned}$$

□

Definizione 1.10. *Siano dati una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Si dice allora che <u>f è Riemann integrabile in A</u> se $f\varphi_A \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. In tal caso si pone*

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_A$$

L'insieme delle funzioni Riemann integrabili in A è indicato con $\mathcal{R}(A)$. Diremo che $f : A \to \mathbb{R}$ <u>è Riemann integrabile in A</u> se

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{se } x \in A \\ 0 & \textit{se } x \in \mathbb{R}^n \backslash A \end{cases}$$

risulta Riemann integrabile in $\mathbb{R}^n$*. In tal caso poniamo*

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} F.$$

OSSERVAZIONE 1.19. *Definizione 1.10 estende Definizione 1.9 e cioè è coerente con essa.*

OSSERVAZIONE 1.20. *Si può facilmente dimostrare che per* $\mathcal{R}(A)$ *sussistono i risultati corrispondenti a Proposizione 1.10, Proposizione 1.11 e Proposizione 1.12.*

OSSERVAZIONE 1.21. *Perfino una funzione "molto bella" può risultare non integrabile in un insieme, se quest'ultimo è "sufficientemente brutto". Per esempio, la funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$$

non è integrabile in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Vale il seguente teorema di integrabilità di una funzione continua.

TEOREMA 1.1. *Sia* A *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *e supponiamo che valga la seguente condizione (che riassumeremo dicendo che "*∂A *ha misura zero"): per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono due pluriintervalli aperti a destra* P_I *e* P_E *tali che*

$$P_I \subset A \subset P_E, \qquad m_n(P_E \backslash P_I) \leq \varepsilon. \tag{22}$$

Allora ogni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *che sia continua in* A *è anche Riemann integrabile in* A*.*

DIMOSTRAZIONE (di Teorema 1.1): Osserviamo che f è uniformemente continua in A. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$, ogni volta che $x, x' \in A$ soddisfano $|x - x'| \leq \delta$. Ora, presi P_I e P_E come in (22), possiamo supporre (suddividendo gli intervalli, se necessario) che

(i) La famiglia di intervalli $\{D_j\}_{j=1}^N$ costituenti P_I sia una sottofamiglia degli intervalli costituenti P_E, che potremo quindi indicare con $\{D_j\}_{j=1}^{N+k}$;
(ii) Il diametro di ogni D_j, con $j = 1, \ldots, N$, non superi δ.

Posto

$$M := \max_A |f|$$

definiamo

$$\psi_- := \sum_{j=1}^{N} \left(\min_{\overline{D_j}} f \right) \varphi_{D_j} + \sum_{j=N+1}^{N+k} (-M)\varphi_{D_j}$$

$$\psi_+ := \sum_{j=1}^{N} \left(\max_{\overline{D_j}} f \right) \varphi_{D_j} + \sum_{j=N+1}^{N+k} M\varphi_{D_j}$$

e osserviamo che

$$\psi_- \in \Sigma_-(f\varphi_A), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f\varphi_A).$$

Se indichiamo con I_0 un qualsiasi intervallo fissato contenente A e scegliamo $\xi_j, \eta_j \in \overline{D_j}$ in modo che

$$f(\eta_j) = \max_{\overline{D_j}} f, \qquad f(\xi_j) = \min_{\overline{D_j}} f,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
I_n^+(f\varphi_A) - I_n^-(f\varphi_A) &\le I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\
&= \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j) m_n(D_j) - \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j) m_n(D_j) + \sum_{j=N+1}^{N+k} 2M\, m_n(D_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(f(\eta_j) - f(\xi_j)\right) m_n(D_j) + 2M m_n(P_E \backslash P_I) \\
&\le \varepsilon \sum_{j=1}^{N} m_n(D_j) + 2\varepsilon M \\
&\le \varepsilon \left(m_n(I_0) + 2M\right).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $I_n^+(f\varphi_A) = I_n^-(f\varphi_A)$. □

Osservazione 1.22. *Supponiamo che A sia un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ avente frontiera di misura zero e che esista un aperto Ω tale che $\overline{\Omega} = A$. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in A, allora:*

- *Si prova facilmente che $f\varphi_{\partial A} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e vale*
$$\int_{\partial A} f = 0;$$
- *Per Teorema 1.1, si ha $f\varphi_A \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.*

Poiché $\partial A = \overline{\Omega}\backslash\Omega = A\backslash\Omega$, ne segue che $f\varphi_\Omega = f\varphi_A - f\varphi_{\partial A} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e vale
$$\int_\Omega f = \int_A f - \int_{\partial A} f = \int_A f.$$

Argomenti intuitivi (agricoli!) giustificano la validità delle seguenti formule di "integrazione iterata":

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_z} f(x,y,z)\, dxdy \right) dz, \qquad A_z := \{(x,y) \,|\, (x,y,z) \in A\};$$

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y) dx \right) dy, \qquad A_y := \{x \,|\, (x,y) \in A\}; \tag{23}$$

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy, \qquad A_{(x,y)} := \{z \,|\, (x,y,z) \in A\}.$$

Osservazione 1.23. *Il fatto che siano verificate le condizioni per l'esistenza del secondo membro nelle formule precedenti, detto "integrale iterato", non implica, in generale, l'integrabilità di f in A. Per esempio, con riferimento a (23), consideriamo $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che*

$$A_y = \begin{cases} [0,1) & \text{se } y \in [0,1) \cap \mathbf{Q} \\ [1,2) & \text{se } y \in [0,1)\backslash\mathbf{Q} \\ \emptyset & \text{se } y \in \mathbb{R}\backslash[0,1) \end{cases}$$

e sia f la funzione identicamente uguale a 1 in $\mathbb{R}^2$. Vediamo allora subito che $x \mapsto f(x,y)$ è Riemann integrabile in A_y per ogni y e che si ha

$$\int_{A_y} f(x,y)dx = \varphi_{[0,1)}(y), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

In particolare, quindi, anche $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Tuttavia la funzione f non è integrabile in A poiché, come si vede facilmente, si ha

$$I_2^-(f\varphi_A) = I_2^-(\varphi_A) = 0, \qquad I_2^+(f\varphi_A) = I_2^+(\varphi_A) = 2.$$

Valgono i seguenti teoremi che dimostreremo in seguito.

TEOREMA 1.2. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $x \mapsto f(x,y)$ è Riemann integrabile in $A_y := \{x \,|\, (x,y) \in A\}$, per ogni y, allora la funzione $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy = \int_A f;$$

(2) *Se $y \mapsto f(x,y)$ è Riemann integrabile in $A_x := \{y \,|\, (x,y) \in A\}$, per ogni x, allora la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y)dy$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx = \int_A f.$$

TEOREMA 1.3. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_z := \{(x,y) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni z, allora la funzione $z \mapsto \int_{A_z} f(x,y,z)dxdy$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_A f;$$

(2) *Se $(x,z) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_y := \{(x,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni y, allora la funzione $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y,z)dxdz$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y,z)dxdz \right) dy = \int_A f;$$

(3) *Se $(y,z) \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_x := \{(y,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni x, allora la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y,z)dydz$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_x} f(x,y,z)dydz \right) dx = \int_A f.$$

TEOREMA 1.4. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $z \mapsto f(x,y,z)$ è Riemann integrabile in $A_{(x,y)} := \{z \,|\, (x,y,z) \in A\}$, per ogni (x,y), allora la funzione $(x,y) \mapsto \int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}^2$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_A f;$$

(2) *Se* $y \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(x,z)} := \{y \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* (x,z), *allora la funzione* $(x,z) \mapsto \int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy \right) dxdz = \int_A f;$$

(3) *Se* $x \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(y,z)} := \{x \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* (y,z), *allora la funzione* $(y,z) \mapsto \int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx \right) dydz = \int_A f.$$

Esempi.

DIMOSTRAZIONE (di Teorema 1.2: Sarà sufficiente provare (1), essendo la dimostrazione di (2) identica a quella di (1).

Primo passo: $A = \mathbb{R}^2$. Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare

$$\psi_- \in \Sigma_-(f), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f)$$

tali che

$$I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \leq \varepsilon.$$

Senza perdere in generalità possiamo supporre che esse siano combinazione lineare delle stesse funzioni caratteristiche, cioè

$$\psi_- = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{D_j}, \qquad \psi_+ = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{D_j}$$

con

$$D_j = A_j \times B_j, \qquad (A_j, B_j \text{ intervalli aperti a destra in } \mathbb{R}).$$

Osserviamo che , per ogni y fissato, le funzioni $x \mapsto \psi_-(x,y)$ e $x \mapsto \psi_+(x,y)$ sono semplici. Si ha più precisamente

$$\psi_-(\cdot, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y) \varphi_{A_j}, \qquad \psi_+(\cdot, y) = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y) \varphi_{A_j}.$$

Poiché inoltre

$$\psi_-(\cdot, y) \leq f(\cdot, y) \leq \psi_+(\cdot, y)$$

per ogni y, segue da Proposizione 1.12 che

$$I_1(\psi_-(\cdot, y)) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \leq I_1(\psi_+(\cdot, y))$$

e cioè

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \leq \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j)$$

per ogni y. Se poniamo

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx, \qquad \Psi_-(y) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y), \qquad \Psi_+(y) := \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y)$$

allora si ha

$$\Psi_- \in \Sigma_-(F), \qquad \Psi_+ \in \Sigma_+(F).$$

Osservando che

$$I_1(\Psi_-) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(A_j)m_1(B_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(D_j) = I_2(\psi_-)$$

e

$$I_1(\Psi_+) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(A_j)m_1(B_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(D_j) = I_2(\psi_+)$$

troviamo prima di tutto che

$$I_1^+(F) - I_1^-(F) \le I_1(\Psi_+) - I_1(\Psi_-) = I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \le \varepsilon$$

e cioè, essendo ε arbitrario, che F è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Inoltre

$$I_2(\psi_-) \le I_1(\Psi_-) \le \int_{\mathbb{R}} F \le I_1(\Psi_+) \le I_2(\psi_+).$$

Poiché si ha anche

$$I_2(\psi_-) \le \int_{\mathbb{R}^2} f \le I_2(\psi_+)$$

si ottiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f - \int_{\mathbb{R}} F \right| \le \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} F.$$

Ciò conclude la dimostrazione di (1), nel caso $A = \mathbb{R}^2$.

Secondo passo: $A \subset \mathbb{R}^2$ qualsiasi. In tal caso, basta applicare il primo passo alla funzione $f\varphi_A$ dopo aver osservato che

(i) $f\varphi_A$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}^2$;
(ii) $x \mapsto (f\varphi_A)(x,y)$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Infatti si ha

$$\varphi_A(x,y) = \varphi_{A_y}(x)$$

e inoltre, per ogni y, la funzione $f(\cdot,y)\varphi_{A_y}$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ per ipotesi.

Se ne deduce che

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_{A_y}(x)dx = \int_{A_y} f(x,y)dx$$

è Riemann integrabile e si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx \right) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} f\varphi_A$$
$$= \int_A f.$$

□

Osservazione 1.24. *L'argomento usato per la dimostrazione precedente si adatta in modo naturale e semplice per provare Teorema 1.3 e Teorema 1.4.*

Osservazione 1.25. *Sia A una regione "elementare", come per esempio: il rettangolo, il disco, il prisma, il cilindro, il cono, la piramide, la sfera. Allora, com' è facile verificare, ∂A ha misura zero e dunque la funzione identicamente 1 è integrabile secondo Riemann in A (grazie a Teorema 1.1). Il calcolo esplicito di $\int_A 1$ in questi casi elementari conduce a risultati coerenti a quelli noti fin dall'antichità. Questo fatto, insieme con le proprietà generali di $\int_A 1$ (invarianza rispetto ad alcune classi di trasformazioni), costituisce una buona motivazione per la seguente definizione.*

Definizione 1.11. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Riemann (in $\mathbb{R}^n$) se la sua funzione caratteristica è Riemann integrabile in $\mathbb{R}^n$, cioè se la funzione che vale identicamente 1 appartiene a $\mathcal{R}(A)$. In tal caso, si definisce la misura n-dimensionale di A (secondo Riemann) come il numero*

$$m_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_A = \int_A 1.$$

Notazione alternativa: $\mathcal{L}^n(A)$, $\mathcal{H}^n(A)$.

Osservazione 1.26. *Se A soddisfa alle ipotesi di Teorema 1.1, allora ∂A è misurabile secondo Riemann e si ha $m_n(\partial A) = 0$.*

Esempio: la misura del "solido a punta".

Osservazione 1.27. *Considerata una funzione $f : \Omega \to [0, +\infty)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, definiamo il suo "sottografico":*

$$S_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \Omega,\ 0 \le z \le f(x,y) \right\}.$$

Vale la seguente

Proposizione 1.13. *Sia S_f è misurabile secondo Riemann. Allora f è integrabile in Ω e si ha*

$$\int_\Omega f = m_3(S_f).$$

DIMOSTRAZIONE: Poiché

$$(S_f)_{(x,y)} = \begin{cases} [0, f(x,y)] & se\ (x,y) \in \Omega \\ \emptyset & se\ (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

risulta banalmente che la funzione $z \mapsto 1$ è Riemann integrabile in $(S_f)_{(x,y)}$, per ogni (x,y). Dal Teorema 1.4 segue subito che

$$(x,y) \mapsto \int_{(S_f)_{(x,y)}} 1\, dz = f(x,y)\varphi_\Omega(x,y)$$

è a sua volta Riemann integrabile in $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$m_3(S_f) = \int_{S_f} 1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{(S_f)_{(x,y)}} 1\, dz \Big) dxdy = \int_\Omega f(x,y)\, dxdy. \tag{24}$$

$\square$

Un caso notevole in cui S_f *risulta misurabile secondo Riemann (e vale quindi la formula (24)), si verifica quando* f *è continua e* Ω *è un compatto con frontiera di misura zero. Più precisamente:*

- *Dalla continuità di* f *e dalla compattezza di* Ω*, si ricava facilmente che* S_f *è compatto;*
- *La dimostrazione di Teorema 1.1 prova che* ∂S_f *ha misura zero;*
- *Teorema 1.1 implica che* 1 *è integrabile su* S_f *e cioè che* S_f *è misurabile.*

Dimostrazione di $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}$.

INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA: [**2**] è un possibile testo di riferimento per la teoria dell'integrazione secondo Riemann, coerente con l'esposizione fattane in queste note.

4. Integrale su una superficie

PROPOSIZIONE 1.14. *Poniamo:*

$$\mathbb{P}(u,v) := \{ru + sv \mid r,s \in [0,1]\}, \qquad \text{per } u,v \in \mathbb{R}^n \ (n = 2,3)$$

e

$$\mathbb{P}(u,v,w) := \{ru + sv + tw \mid r,s,t \in [0,1]\}, \qquad \text{per } u,v,w \in \mathbb{R}^3.$$

allora si ha:

$$m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = \begin{cases} \|u \times v\| & \text{se } u,v \in \mathbb{R}^3 \\ |\det(u|v)| & \text{se } u,v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

e

$$m_3\left(\mathbb{P}(u,v,w)\right) = |(u \times v) \bullet w| = |\det(u|v|w)|, \qquad \text{se } u,v,w \in \mathbb{R}^3.$$

DIMOSTRAZIONE: La prima formula segue subito dalla definizione di prodotto vettoriale data nel corso di Fisica.

La seconda formula si ottiene dalla prima, come segue. Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, poniamo

$$\tilde{u} := (u_1, u_2, 0), \qquad \tilde{v} = (v_1, v_2, 0).$$

Allora, per la prima formula, si ha

$$m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = m_2\left(\mathbb{P}(\tilde{u},\tilde{v})\right) = \|(u_1,u_2,0) \times (v_1,v_2,0)\| = |\det(u|v)|.$$

Per provare la terza formula, osserviamo che la misura della proiezione di w nella direzione ortogonale al piano generato da u e v è data da

$$H := \left| w \bullet \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \right|.$$

Quindi, di nuovo ricordando la prima formula, troviamo

$$m_3\left(\mathbb{P}(u,v,w)\right) = H\, m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = |w \bullet (u \times v)|.$$

La conclusione segue facilmente ricordando la formula per il calcolo del prodotto vettoriale attraverso il determinante formale. $\square$

Esempi di parametrizzazione di una superficie (grafico di una funzione di due variabili, grafici di rotazione, sfera, cono).

OSSERVAZIONE 1.28. *Ogni superficie liscia ammette parametrizzazioni non lisce. Inoltre esistono superfici non lisce con parametrizzazioni lisce (esempio: $\varphi(s,t) := (s^3, s^2, t)$, $(s,t) \in [-1,1]^2$).*

Nella seguente proposizione si introduce una condizione di regolarità (omologa a quella delle curve) e si dimostra come essa serva a prevenire situazioni come quella descritta nella precedente osservazione.

PROPOSIZIONE 1.15. *Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, con A un aperto di $\mathbb{R}^2$, una mappa iniettiva di classe C^1 soddisfacente la seguente condizione (detta di regolarità):*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(P) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(P) \neq 0 \tag{25}$$

per ogni $P \in A$. Allora $\varphi(A)$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(s_0, t_0) \in A$. Per (25), deve essere verificata almeno una delle seguenti equazioni:

$$\det\left(\nabla\varphi_1(s_0,t_0)|\nabla\varphi_2(s_0,t_0)\right) \neq 0 \tag{26}$$

$$\det\left(\nabla\varphi_1(s_0,t_0)|\nabla\varphi_3(s_0,t_0)\right) \neq 0 \tag{27}$$

$$\det\left(\nabla\varphi_2(s_0,t_0)|\nabla\varphi_3(s_0,t_0)\right) \neq 0. \tag{28}$$

Proveremo adesso che se è verificata (26), allora, vicino a $P_0 := \varphi(s_0,t_0)$, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x,y).

In tal caso infatti, per il teorema di invertibilità locale (che è una facile conseguenza del teorema delle funzioni implicite di Dini; vedasi [**2, 3**]), deve esistere un intorno U di (s_0,t_0), con $U \subset A$, e un intorno V di $(\varphi_1(s_0,t_0), \varphi_2(s_0,t_0))$ tali che se $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)|U$ si ha $V = \Phi(U)$ e

$$\Phi : U \to V$$

è invertibile con inversa di classe C^1. A questo punto è facile verificare che $\varphi(U)$ è grafico di una funzione di classe C^1 e precisamente di

$$\varphi_3 \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}.$$

Infatti, dire che $(x,y,z) \in \varphi(U)$ equivale a dire che

$$(x,y) = \Phi(s,t), \qquad z = \varphi_3(s,t)$$

per un certo $(s,t) \in U$. Ma questo è vero se e solo se $z = \varphi_3 \circ \Phi^{-1}(x,y)$.

Analogamente si può provare che se è verificata (27) (risp. (28)), allora, vicino a P_0, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x,z) (risp. (y,z)). $\square$

Osservazione 1.29. *Sia I un intorno di 0 in $\mathbb{R}$ e*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$$

una curva derivabile in 0. Sia poi A un intorno di $\gamma(0)$ e

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : A \to \mathbb{R}^3$$

una mappa differenziabile in $\gamma(0)$. Allora, per $j = 1,2,3$, la funzione $\varphi_j \circ \gamma$ è derivabile in 0 e si ha

$$(\varphi_j \circ \gamma)'(0) = \nabla\varphi_j(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0).$$

In altri termini, il campo $\varphi \circ \gamma$ è derivabile in 0 e se $d\varphi_{(s_0,t_0)}$ indica il differenziale di φ in (s_0,t_0), cioè la matrice

$$d\varphi_{(s_0,t_0)} := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \right)$$

allora

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\gamma)'(0) &= (\nabla\varphi_1(\gamma(0))\bullet\gamma'(0), \nabla\varphi_2(\gamma(0))\bullet\gamma'(0), \nabla\varphi_3(\gamma(0))\bullet\gamma'(0)) \\ &= d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= \gamma_1'(0)\frac{\partial\varphi}{\partial s}(\gamma(0)) + \gamma_2'(0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\gamma(0)).\end{aligned} \tag{29}$$

Proposizione 1.16. *Sia A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^3$$

una mappa tale che

(i) *φ sia differenziabile in $(s_0,t_0) \in A$;*
(ii) *La condizione di regolarità sia verificata in (s_0,t_0), i.e.*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \neq 0.$$

Allora:

(1) *lo spazio vettoriale $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ ha dimensione due e una sua base è data da*

$$\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \right\};$$

(2) *$v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ se e soltanto se esiste*

$$\gamma : I \to A$$

dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intorno di 0, derivabile in 0 e tale che

$$\gamma(0) = (s_0,t_0), \qquad (\varphi\circ\gamma)'(0) = v. \tag{30}$$

DIMOSTRAZIONE: (1) Segue banalmente da (ii) e dalla definizione di $d\varphi_{(s_0,t_0)}$.

(2) Sia $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$, cioè $v = d\varphi_{(s_0,t_0)}(w)$ per un certo $w \in \mathbb{R}^2$. Se poniamo ($\varepsilon > 0$, sufficientemente piccolo)

$$\gamma(\rho) := (s_0, t_0) + \rho w, \quad \rho \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

e ci ricordiamo della formula (29), otteniamo subito che vale (30).

Anche il viceversa è una conseguenza, stavolta immediata, di (29). □

PROPOSIZIONE 1.17. *Siano A e B sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi : B \to \mathbb{R}^3$$

mappe iniettive di classe C^1, entrambe soddisfacenti la condizione di regolarità. Supponiamo inoltre che

$$\varphi(A) = \psi(B).$$

Allora, se $(s_0, t_0) \in A$ e $(u_0, v_0) \in B$ sono tali che

$$\varphi(s_0, t_0) = \psi(u_0, v_0)$$

si ha

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2) = d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2).$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$. Grazie a Proposizione 1.16 esiste $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ ($\varepsilon > 0$) derivabile in 0 e tale che

$$\gamma(0) = (s_0, t_0), \qquad (\varphi \circ \gamma)'(0) = v.$$

Definiamo

$$\lambda := \psi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$$

e osserviamo che $\lambda(0) = (u_0, v_0)$. Inoltre, mediante un argomento simile a quello invocato in Proposizione 1.5, si può dimostrare che λ è derivabile in 0. Poiché $\psi \circ \lambda = \varphi \circ \gamma$, si ottiene che

$$v = (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \lambda)'(0) = d\psi_{(u_0,v_0)}(\lambda'(0)) \in d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2).$$

Così l'inclusione

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2) \subset d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2)$$

segue dall'arbitrarietà di $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$, mentre quella opposta si ricava scambiando i ruoli di φ e ψ. □

La Proposizione 1.16 motiva la seguente definizione, che risulta ben posta per Proposizione 1.17.

DEFINIZIONE 1.12. *Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ una mappa iniettiva di classe C^1 soddisfacente la condizione di regolarità. Allora, per $(s_0, t_0) \in A$, lo spazio vettoriale bidimensionale $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ è denominato <u>piano tangente a $S := \varphi(A)$ in $P_0 := \varphi(s_0, t_0)$</u> e viene indicato con la notazione $T_{P_0}S$. Ogni suo elemento viene detto <u>vettore tangente a S in P_0</u>.*

Vogliamo definire l'integrale di una funzione su una superficie e, in particolare, una nozione di misura delle superfici che estenda coerentemente l'area nota di superfici "elementari" come la porzione poligonale di piano, il cono, il cilindro o la sfera. Volendo riprendere l'idea di considerare le superfici poliedrali (triangolari), ci si deve ricordare dell'esempio di Schwarz (vedi Oss. 1.4).

Esso ci indica che i triangoli debbono essere scelti di modo che, passando al limite, essi tendano a disporsi "in posizione tangente".

Osservazione 1.30. *Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, una mappa che supporremo iniettiva, regolare e di classe C^1. Preso $(s_0, t_0) \in A$, siano poi $T(\varepsilon)$ e $T_\varphi(\varepsilon)$, rispettivamente, il triangolo interno ad A di vertici (s_0, t_0), $(s_0 + \varepsilon, t_0)$, $(s_0, t_0 + \varepsilon)$ e quello inscritto in*

$$S := \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$$

di vertici $\varphi(s_0, t_0)$, $\varphi((s_0 + \varepsilon, t_0)$, $\varphi((s_0, t_0 + \varepsilon)$. Le ben note uguaglianze

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(s_0 + \varepsilon, t_0) - \varphi(s_0, t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0, t_0), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(s_0, t_0 + \varepsilon) - \varphi(s_0, t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

ci mostrano che il triangolo $T_\varphi(\varepsilon)$ tende (quando $\varepsilon \to 0$) a disporsi "in posizione tangente" a S in $\varphi(s_0, t_0)$. Inoltre si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\|. \tag{31}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} &= \frac{\|[\varphi(s_0 + \varepsilon, t_0) - \varphi(s_0, t_0)] \times [\varphi(s_0, t_0 + \varepsilon) - \varphi(s_0, t_0)]\|/2}{\varepsilon^2/2} \\ &= \left\| \frac{\varphi(s_0 + \varepsilon, t_0) - \varphi(s_0, t_0)}{\varepsilon} \times \frac{\varphi(s_0, t_0 + \varepsilon) - \varphi(s_0, t_0)}{\varepsilon} \right\| \end{aligned}$$

per Proposizione 1.14. Il numero al secondo membro di (31) si candida dunque ad essere il "fattore di trasformazione dell'area" indotto da φ in (s_0, t_0).

Ci aspettiamo quindi che, data una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ e sotto opportune ulteriori ipotesi, il numero

$$\int_A f \circ \varphi \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|$$

costituisca il candidato naturale per la definizione dell'integrale su S di f.

Esempio: l'area "presunta" della sfera coincide con quella nota elementarmente.

In vista delle prossime definizioni è utile disporre di una nozione di "mappa di classe C^1 su un insieme chiuso".

Definizione 1.13. *Sia C un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$. Allora si dice che una funzione $\underline{f : C \to \mathbb{R}}$ $\underline{\text{è di classe } C^1}$ se esistono un sottoinsieme aperto $\widetilde{A}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{f} \in C^1(\widetilde{A})$ tali che $\widetilde{A} \supset C$ e $\tilde{f}|C = f$. Diremo che una mappa $\underline{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : C \to \mathbb{R}^k \text{ è di classe } C^1}$ se ogni sua componente φ_i è una funzione di classe C^1.*

Nelle seguenti due definizioni si precisa la natura del dominio di integrazione, per l'integrale di superficie.

Definizione 1.14. *Diremo che $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una <u>parametrizzazione regolare (di superficie)</u> se*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera ha misura zero;*

(ii) *$\varphi|A$ è iniettiva;*
(iii) *φ è di classe C^1 e*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(P) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(P) \neq 0$$

per ogni $P \in A$.

Una <u>superficie regolare</u> è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ per cui esiste una parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(C)$.

Osservazione 1.31. *Si considerino una parametrizzazione regolare di superficie $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ e una funzione continua $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$. Allora, per Teorema 1.1, la funzione*

$$\left(f \circ \widetilde{\varphi} \left\| \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial v} \right\|\right)(s,t), \qquad (s,t) \in C$$

è integrabile su C ($\widetilde{\varphi}$ è l'estensione di φ conforme a Definizione 1.13). Grazie a Osservazione 1.22, la funzione

$$\left(f \circ \varphi \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|\right)(s,t), \qquad (s,t) \in A$$

è integrabile su A e si ha

$$\int_A f \circ \varphi \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \int_C f \circ \widetilde{\varphi} \left\| \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial v} \right\|.$$

Vale il seguente risultato sull'indipendenza dalla parametrizzazione, omologo di Proposizione 1.5 per le curve.

Proposizione 1.18. *Se $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$, $\psi : K \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni regolari tali che*

$$\varphi(C) = \psi(K)$$

e se è data una qualsiasi funzione continua

$$f : \varphi(C) = \psi(K) \to \mathbb{R},$$

allora si ha

$$\int_A f \circ \varphi \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \int_B f \circ \psi \left\| \frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\|$$

dove A e B sono gli aperti di $\mathbb{R}^2$, la cui esistenza è prevista dalla definizione di parametrizzazione regolare, tali che $\overline{A} = C$ e $\overline{B} = K$.

La Definizione 1.14 si estende naturalmente al caso "regolare a tratti", come segue.

Definizione 1.15. *Una <u>parametrizzazione regolare a tratti (di superficie)</u> è una mappa*

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3$$

tale che $\varphi|(C \backslash \partial C)$ è iniettiva e gode della seguente ulteriore proprietà. Esistono $C_1, \dots, C_N$ insiemi compatti tali che

(i) *$C = \cup_{j=1}^N C_j$;*
(ii) *$C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$, se $i \neq j$;*
(iii) *Per ogni $j = 1, \dots, N$, la mappa $\varphi|C_j$ è una parametrizzazione regolare.*

Ogni sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ per cui esiste una parametrizzazione regolare a tratti $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(C)$ è detto <u>*superficie regolare a tratti.*</u>

Usando Proposizione 1.18, si può provare che la seguente definizione è ben posta.

Definizione 1.16. *Sia S una superficie regolare a tratti e siano φ e $\{C_j\}_{j=1}^N$ come in Definizione 1.15. Inoltre, per $j = 1, \dots, N$, indichiamo con A_j l'aperto tale che $C_j = \overline{A_j}$, conformemente alla definizione di parametrizzazione regolare. Poniamo anche*

$$A := \cup_{j=1}^N A_j.$$

Allora, se $f : S \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, <u>*l'integrale di f su S*</u> *è il numero*

$$\int_S f := \int_A f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|.$$

In particolare, si può definire l'area di S:

$$m_2(S) := \int_S 1 = \int_A \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

Notazione alternativa: $\int_S f \, d\sigma$, $\int_S f \, d\mathcal{H}^2$.

Osservazione 1.32. *La definizione precedente di misura di una superficie gode delle proprietà naturalmente attese per questa nozione. Per esempio, per le superfici di cui sia nota elementarmente l'area (una porzione poligonale di piano, un cilindro, un cono, una sfera, ...), allora tale area coincide con la corrispondente misura m_2. Inoltre, si prova molto facilmente che*

$$m_2(S + v) = m_2(S)$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ (invarianza rispetto alla traslazione) e

$$m_2(\lambda S) = \lambda^2 m_2(S)$$

per ogni numero reale non nullo λ (invarianza rispetto alle omotetie).

Osservazione 1.33. *Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera abbia misura zero. Sia poi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in C. Allora*

(1) *f è integrabile in C (per il Teorema 1.1);*
(2) *La mappa*
$$\iota(s,t) := (s,t,0), \qquad (s,t) \in C$$
è una parametrizzazione regolare di superficie Che ι sia di classe C^1 si prova scegliendo $\widetilde{A} := \mathbb{R}^2$ e $\widetilde{\iota}(s,t) := (s,t,0)$;
(3) *Posto $\widetilde{C} := \widetilde{\iota}(C) = \iota(C)$, la funzione $\widetilde{f} : \widetilde{C} \to \mathbb{R}$ definita come segue*
$$\widetilde{f}(x,y,0) := f(x,y)$$
è continua.

Applicando Definizione 1.16, si trova

$$\int_{\widetilde{C}} \widetilde{f} = \int_A (\widetilde{f} \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = \int_A f. \tag{32}$$

Quest'ultima uguaglianza stabilisce la coerenza fra le nozioni di integrale d'area e integrale di superficie.

OSSERVAZIONE 1.34. *Sia data una mappa $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ soddisfacente le seguenti ipotesi:*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera ha misura zero;*
(ii) *$\Phi|A$ è iniettiva;*
(iii) *Φ è di classe C^1 (i.e. esiste $\widetilde{\Phi} : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^2$ tale che $\widetilde{A}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente C, $\widetilde{\Phi}$ è di classe C^1 e $\widetilde{\Phi}|C = \Phi$) e*
$$|\det(d\Phi(P))| = \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(P)\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}(P)\right)\right| \neq 0$$
per ogni $P \in A$.

Allora la mappa $\varphi := \widetilde{\iota} \circ \Phi$ i.e.
$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(P) := (\Phi_1(P), \Phi_2(P), 0)$$
è una parametrizzazione regolare di superficie, con
$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(P) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(P)\right\| = \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(P)\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}(P)\right)\right|, \qquad P \in A.$$
Se ora consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in $\Phi(C)$ e poniamo
$$\tilde{f}(x, y, z) := f(x, y), \qquad (x, y) \in \Phi(C)$$
possiamo osservare che $\tilde{f} \circ \varphi = f \circ \Phi$. Pertanto
$$\int_{\widetilde{\iota}(\Phi(C))} \tilde{f} = \int_{\varphi(C)} \tilde{f} = \int_A (\tilde{f} \circ \varphi) \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = \int_A (f \circ \Phi) \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right|. \tag{33}$$
Osserviamo che $\Phi(C)$ è compatto, $\Phi(A)$ è aperto (per il teorema di invertibilità locale) e $\overline{\Phi(A)} = \Phi(C)$ (ovviamente!). In virtù di (33) e di Osservazione 1.33, risulta ora interessante considerare il caso che $\Phi(A)$ abbia frontiera di misura zero, condizione che in realtà si può provare essere sempre verificata sotto le altre ipotesi assunte (cfr. Osservazione 1.35). Infatti da tale condizione, insieme con (32) e (33), si ottiene subito
$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right|$$
nota come la "formula per il cambiamento di variabile nell'integrale".

DEFINIZIONE 1.17. *Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e*
$$\Phi : A \to \mathbb{R}^n$$
una mappa di classe C^1. Si chiama <u>fattore di trasformazione della misura (associato a Φ)</u> la funzione continua $J\Phi : A \to \mathbb{R}$ definita come segue:
$$J\Phi := |\det(d\Phi)| = \begin{cases} \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right|, & se\ n = 2 \\ \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right|, & se\ n = 3. \end{cases}$$

Enunciamo ora il teorema del cambiamento della variabile nell'integrale che qui abbiamo provato nel caso bidimensionale

TEOREMA 1.5. *Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, chiusura di un aperto A la cui frontiera ha misura zero. Consideriamo una mappa $\Phi : C \to \mathbb{R}^n$ tale che:*

(i) *$\Phi|A$ è iniettiva;*
(ii) *Φ è di classe C^1 (i.e. esiste $\widetilde{\Phi} : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^n$ tale che $\widetilde{A}$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente C, $\widetilde{\Phi}$ è di classe C^1 e $\widetilde{\Phi}|C = \Phi$);*
(iii) *$J(\Phi|A)(P) \neq 0$ per ogni $P \in A$.*

Allora $\Phi(A)$ è un insieme aperto e $\overline{\Phi(A)} = \Phi(C)$ e nell'ulteriore ipotesi che

(iv) *$\partial(\Phi(A))$ abbia misura zero*

vale la seguente uguaglianza

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi)\, J\Phi$$

per ogni funzione continua $f : \Phi(C) \to \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 1.35. *Si prova che, in Teorema 1.5, l'ipotesi (iv) è superflua in quanto segue dalle altre assunzioni.*

Esempi

DEFINIZIONE 1.18. *Una <u>superficie regolare orientatata</u> è una coppia (S, N) tale che:*

(i) *S è una superficie regolare;*
(ii) *$N : S \to \mathbb{R}^3$ è un campo ortogonale a S, unitario e continuo.*

Esempio di S liscia per la quale non esiste N tale che (S, N) è una superficie regolare orientata: il nastro di Moebius.

DEFINIZIONE 1.19. *Siano (S, N) e $F : S \to \mathbb{R}^3$, rispettivamente, una superficie regolare orientatata e un campo continuo di vettori. Allora l'<u>integrale di F su (S, N)</u> è definito come segue:*

$$\int_{(S,N)} F := \int_S F \bullet N.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overrightarrow{S}} F \bullet d\sigma$.

OSSERVAZIONE 1.36. *Sia (S, N) una superficie regolare orientata e sia φ una parametrizzazione regolare di S. Allora, in virtù di Proposizione 1.16(1), si ha*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sigma \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| N \circ \varphi$$

dove σ vale identicamente 1 (risp. -1) se i vettori collineari

$$N \circ \varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

hanno verso coincidente (risp. opposto). Ne segue che

$$\int_{(S,N)} F = \int_A (F \circ \varphi) \bullet (N \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sigma \int_A (F \circ \varphi) \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Osserviamo che nel caso particolare che S sia il grafico di una funzione f di classe C^1 e considerata la parametrizzazione "naturale"

$$\varphi(s,t) := (s, t, f(s,t)),$$

si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Big(- \frac{\partial f}{\partial s}, - \frac{\partial f}{\partial t}, 1 \Big).$$

5. Teoremi di Gauss, Green, Stokes

Enunceremo ora il Teorema di Gauss della divergenza ($n = 2, 3$), di cui daremo la dimostrazione in seguito.

Teorema 1.6 (Gauss). *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera regolare a tratti. Indichiamo con N il campo normale a ∂C uscente da C e sia $F : C \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe C^1. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet N = \int_C \operatorname{div} F.$$

Osservazione 1.37. *Consideriamo il caso $n = 2$ e supponiamo che C e F soddisfino alle ipotesi di Teorema 1.6. Indichiamo con τ il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C, cioè quello ottenuto ruotando N (il campo normale a ∂C uscente da C) di $\pi/2$ in senso antiorario. Allora il Teorema di Gauss implica che*

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_{\partial C} F \bullet RN = \int_{\partial C} RF \bullet R(RN) = \int_{\partial C} (F_2, -F_1) \bullet N = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Vale pertanto il seguente risultato.

Teorema 1.7 (Green). *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera regolare a tratti. Indichiamo con τ il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C e sia $F : C \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Frontiera orientata $\partial \overline{S}$ di una superficie regolare a tratti orientata $\overline{S} = (S, N)$ tale che ∂S è regolare a tratti.

Teorema 1.8 (Stokes). *Sia $\overline{S} = (S, N)$ una superficie regolare orientata tale che ∂S è regolare a tratti. Allora, se $F : S \to \mathbb{R}^3$ è un campo di classe C^1, si ha*

$$\int_{\overline{S}} \operatorname{rot} F = \int_{\partial \overline{S}} F.$$

Due dimostrazioni della formula dell'area dell'ellisse:

(1) mediante la formula per il cambiamento di variabile negli integrali;
(2) mediante il teorema di Green.

Esempi.

Prima di dimostrare il Teorema 1.6 di Gauss, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.20. *Un insieme compatto $C \subset \mathbb{R}^3$ si dice* <u>*semplice*</u> *se esso è la chiusura di un aperto A e se nelle direzioni degli assi coordinati è compreso fra grafici di funzioni lisce a tratti, cioè*

$$\begin{aligned} C &= \Big\{(x,y,z) \,|\, a(x,y) \le z \le b(x,y), \quad (x,y) \in \overline{A^{(z)}}\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \,|\, c(x,z) \le y \le d(x,z), \quad (x,z) \in \overline{A^{(y)}}\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \,|\, e(y,z) \le x \le f(y,z), \quad (y,z) \in \overline{A^{(x)}}\Big\} \end{aligned}$$

dove $A^{(x)}$, $A^{(y)}$, $A^{(z)}$ sono le proiezioni ortogonali di A, rispettivamente nei piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e inoltre:

- *Le funzioni a, b sono continue in $\overline{A^{(z)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *Le funzioni c, d sono continue in $\overline{A^{(y)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *Le funzioni e, f sono continue in $\overline{A^{(x)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(x)}$.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS (per $n = 3$): Ci limiteremo a dimostrare il teorema per insiemi C che sono unione finita di insiemi semplici.

<u>Passo 1: C semplice.</u>

Dimostreremo che si hanno le seguenti uguaglianze

$$\int_C \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_{\partial C} F_1 N_1, \qquad \int_C \frac{\partial F_2}{\partial y} = \int_{\partial C} F_2 N_2, \qquad \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} = \int_{\partial C} F_3 N_3 \tag{34}$$

dalle quali, sommando, si ottiene subito la formula di Gauss. Cominciamo col provare la terza uguaglianza. Si ha

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{C_{(x,y)}} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy = \int_{A^{(z)}} \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \int_{A^{(z)}} F_3(x,y,b(x,y)) - F_3(x,y,a(x,y))\, dxdy \end{aligned} \tag{35}$$

per Teorema 1.4. Indichiamo con G_a e G_b rispettivamente i grafici di a e di b e poniamo

$$S := \partial C \backslash (G_a \cup G_b).$$

Per $(x,y) \in \overline{A^{(z)}}$ definiamo inoltre

$$\varphi(x,y) := (x,y,a(x,y)), \qquad \psi(x,y) := (x,y,b(x,y))$$

e osserviamo che

$$N_3|S \equiv 0, \qquad (N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = -1, \qquad (N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| = 1.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial C} F_3 N_3 &= \int_{G_a} F_3 N_3 + \int_{G_b} F_3 N_3 \\
&= \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \varphi)(N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| + \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \psi)(N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| \\
&= \int_{A^{(z)}} F_3 \circ \psi - F_3 \circ \varphi
\end{aligned}$$

da cui, tenuto conto di (35), segue la terza uguaglianza di (34). Lo stesso ragionamento permette di dimostrare le prime due uguaglianze di (34). Come abbiamo già spiegato sopra, a questo punto si conclude sommando le tre uguaglianze di (34).

Passo 2: $C = \cup_{j=1}^{h} C_j$, dove i C_j sono semplici e si intersecano al più in regioni di frontiera, e cioè

$$C_j \cap C_k = \partial C_j \cap \partial C_k \qquad (j \neq k).$$

Per illustrare il regionamento, sarà sufficiente capire il caso $h = 2$. Supponiamo pertanto che $C = C_1 \cup C_2$, con C_1, C_2 insiemi semplici tali che

$$C_1 \cap C_2 = \partial C_1 \cap \partial C_2.$$

Se indichiamo con N' e N'' rispettivamente i campi normali a ∂C_1 e ∂C_2, uscenti da C_1 e C_2, e poniamo

$$I := \partial C_1 \cap \partial C_2, \qquad \partial^* C_1 := \partial C_1 \backslash I, \qquad \partial^* C_2 := \partial C_2 \backslash I$$

allora si vede subito che

- $N''|I = -N'|I$, cioè $N' + N'' \equiv 0$ in I;
- $\partial^* C_1 \cap \partial^* C_2 = \emptyset$ e $\partial^* C_1 \cup \partial^* C_2 = \partial C$;
- $N|\partial^* C_1 = N'|\partial^* C_1$ e $N|\partial^* C_2 = N''|\partial^* C_2$.

Otteniamo così, tenendo conto anche di quanto dimostrato nel primo passo, che vale

$$\begin{aligned}
\int_C \text{div } F &= \int_{C_1} \text{div } F + \int_{C_2} \text{div } F = \int_{\partial C_1} F \bullet N' + \int_{\partial C_2} F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N' + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N'' + \int_I F \bullet N' + \int_I F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N + \int_I F \bullet (N' + N'') \\
&= \int_{\partial C} F \bullet N.
\end{aligned}$$

□

La dimostrazione del Teorema di Gauss per $n = 2$ (identica a quella per $n = 3$) è lasciata come esercizio.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI STOKES: Ci limiteremo a dimostrare il risultato nel caso che:

(i) S sia il grafico di una funzione $f \in C^1(C)$, con C soddisfacente le ipotesi di Teorema 1.7 (Green);
(ii) Il campo normale a S scelto sia quello per cui risulta $N_3 > 0$.

L'estensione al caso in cui C è unione finita e disgiunta (a meno di regioni di frontiera) di insiemi siffatti si ottiene con un argomento analogo a quello utilizzato nel secondo passo della dimostrazione del Teorema della divergenza.

Proviamo dapprima che la formula vale per il campo $(F_1, 0, 0)$ e cioè che

$$\int_{\overline{S}} \operatorname{rot}(F_1, 0, 0) = \int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0). \tag{36}$$

Sia dunque $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione regolare a tratti di ∂C (coerente con la sua orientazione positiva) e poniamo

$$\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma(t))) = (\gamma(t); f(\gamma(t))), \qquad t \in [a, b].$$

Si ha allora

$$\int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0) \;\; = \;\; \int_a^b ((F_1, 0, 0) \circ \Gamma) \bullet \Gamma' = \int_a^b F_1(\gamma(t); f(\gamma(t)))\gamma_1'(t)\, dt$$

Applicando il Teorema 1.7 (Green) al campo $G := (G_1, G_2) : C \to \mathbb{R}^2$, dove

$$\begin{cases} G_1(x, y) := F_1(x, y, f(x, y)) \\ G_2(x, y) := 0 \end{cases}$$

otteniamo

$$\int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0) = \int_a^b (G \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_{\partial C} G = \int_C \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = - \int_C \frac{\partial G_1}{\partial y}. \tag{37}$$

D'altra parte, parametrizzando S con

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

e osservando che

$$(N \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

si ottiene anche

$$\begin{aligned} \int_{\overline{S}} \operatorname{rot}\,(F_1, 0, 0) &= \int_{\overline{S}} \frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3 \\ &= \int_C \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \circ \varphi \right) (N_2 \circ \varphi) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \circ \varphi \right) (N_3 \circ \varphi) \right] \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \\ &= - \int_C \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, f(x, y))\, dxdy \\ &= - \int_C \frac{\partial G_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza (36) segue ora immediatamente da (37). In maniera analoga si provano anche le uguaglianze

$$\int_{\overline{S}} \operatorname{rot}(0, F_2, 0) = \int_{\partial \overline{S}} (0, F_2, 0), \qquad \int_{\overline{S}} \operatorname{rot}(0, 0, F_3) = \int_{\partial \overline{S}} (0, 0, F_3).$$

Sommando queste e la (36), si ottiene finalmente la conclusione. □

CHAPTER 2

Campi di vettori, potenziali

DEFINIZIONE 2.1. *Sia A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo un campo continuo $F : A \to \mathbb{R}^n$. Allora ogni funzione $\varphi \in C^1(A)$ tale che $\nabla\varphi \equiv F$ è detta "potenziale" di F.*

OSSERVAZIONE 2.1. *Come abbiamo già visto in Osservazione 1.8 capita sovente che il campo F non abbia un potenziale, e.g. il campo $F(x, y) := (0, x)$ in $\mathbb{R}^2$. Infatti l'esistenza di un potenziale "restringe alquanto la libertà di scelta del campo" che deve soddisfare (se il campo è di classe C^1) la condizione (14).*

OSSERVAZIONE 2.2. *Da un potenziale di F se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con φ il potenziale dato e con A_j ($j = 1, \dots$) le componenti connesse di A, allora ogni funzione così definita*

$$\psi(x) := \varphi(x) + c_j, \qquad \text{se } x \in A_j \tag{38}$$

($c_j \in \mathbb{R}$) è un potenziale di F. Anzi, è facile convincersi anche del viceversa e cioè che ogni potenziale di F è della forma (38). Una dimostrazione rigorosa di quest'ultima affermazione segue subito dal seguente risultato (intuitivamente scontato).

PROPOSIZIONE 2.1. *Se Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ e se f è una funzione differenziabile in Ω con $\nabla f \equiv 0$, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $P_0 \in \Omega$ e definiamo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) = f(P_0)\} \qquad (\neq \emptyset, \text{ in quanto } P_0 \in \Omega_1) \\ \Omega_2 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) \neq f(P_0)\} = \Omega \backslash \Omega_1. \end{aligned}$$

La conclusione seguirà una volta dimostrato che

$$\Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \text{ sono entrambi aperti.} \tag{39}$$

Infatti da questo e dal fatto che Ω è connesso si deduce subito che $\Omega_2 = \emptyset$. Ciò significa che $f(P) = f(P_0)$, per ogni $P \in \Omega$.

Dimostriamo dunque (39). La continuità di f implica subito che Ω_2 è aperto. Per provare che anche Ω_1 lo è, consideriamo $P \in \Omega_1$ e una palla B centrata in P tale che $B \subset \Omega$. Allora, per ogni $Q \in B$, si ha

$$\begin{aligned} f(Q) - f(P_0) &= f(Q) - f(P) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(P + t(Q-P))dt \\ &= \int_0^1 \nabla f(P + t(Q-P)) \bullet (Q-P)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $B \subset \Omega_1$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di $P \in \Omega_1$. $\square$

DEFINIZIONE 2.2. *Diremo che:*

(i) *Un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) di classe C^1 soddisfa la "condizione delle derivate incrociate (CDI)" se vale l'uguaglianza*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n; \text{con } i \neq j).$$

Nota bene: per $n = 3$ tale condizione equivale a $\operatorname{rot} F \equiv 0$.

(ii) *Un campo continuo $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) soddisfa la "condizione dell'indipendenza dal percorso (CIP)" se per ogni coppia ordinata (P, Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di A e per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset A$, l'integrale*

$$\int_{\overline{C}} F$$

dipende solo da (P, Q).

(iii) *Un campo continuo $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) è <u>conservativo</u> se*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$, con C chiusa e contenuta in A

Vale il seguente risultato, come abbiamo già provato in Osservazione 1.8, cfr (13) e (14).

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) un campo continuo e supponiamo che esista un potenziale φ di F. Allora:*

(1) *Se F è di classe C^1 allora esso soddisfa la CDI;*
(2) *Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset A$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

In particolare F soddisfa la CIP.

OSSERVAZIONE 2.3. *Il fatto che $F : A \to \mathbb{R}^n$ sia di classe C^1 e soddisfi la CDI non è sufficiente, in generale, a garantire l'esistenza di un potenziale. Lo capiremo subito attraverso un esempio che riusciremo presto ad interpretare come "rivelatore particolare" di un fenomeno generale. Sia F il campo così definito*

$$A := \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0), \qquad F(x, y) := \frac{R(x, y)}{\|(x, y)\|^2} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

che soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. Mostreremo ora come supporre l'esistenza di un potenziale di F conduca ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo la curva regolare a tratti $\overline{C} = (C, \tau)$ dove C è il cerchio unitario centrato nell'origine e τ è il campo unitario tangente compatibile con l'orientazione "antioraria", i.e.

$$\tau(x, y) = R(x, y), \qquad (x, y) \in C,$$

troviamo subito

$$\int_{\overline{C}} F = \int_C F \bullet \tau = \int_C \frac{\|R(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \int_C 1 = 2\pi. \tag{40}$$

D'altra parte, se esistesse un potenziale φ di F, si avrebbe anche

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per (2) in Proposizione 2.2. Da questa contraddizione segue che F non ha potenziale.

Proviamo ora un semplice fatto, già accennato in Osservazione 1.8.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) un campo continuo. Allora queste due affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(1) *Il campo F è conservativo;*
(2) *Il campo F soddisfa la CIP.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che (1) implica (2). Presi P, Q in una medesima componente connessa di A, siano $\overline{C_1}$ e $\overline{C_2}$ due curve regolari a tratti orientate che congiungono P (punto iniziale) a Q, con $C_1, C_2 \subset A$. Applicando (1) a $\overline{C} := \overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})$, otteniamo

$$0 = \int_{\overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})} F = \int_{\overline{C_1}} F - \int_{\overline{C_2}} F$$

e cioè quanto volevamo provare.

Dimostriamo che (2) implica (1). Consideriamo una curva regolare a tratti orientata e chiusa $\overline{C}$, con $C \subset A$. Scelti $P, Q \in C$ con $P \neq Q$, siano $\overline{C_1}$ e $\overline{C_2}$ le due curve regolari a tratti orientate che congiungono P (punto iniziale) a Q e tali che $\overline{C} = \overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})$. Allora si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})} F = \int_{\overline{C_1}} F - \int_{\overline{C_2}} F = 0.$$

$\square$

Ora, come corollario di (2) in Proposizione 2.2, otteniamo immediatamente la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) un campo continuo e supponiamo che esso abbia un potenziale. Allora F è conservativo.*

La seguente proposizione ci servirà per provare che vale anche il viceversa.

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia A un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Allora considerata una qualsiasi coppia di punti in A esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, che li congiunge (il che si esprime dicendo che A è connesso per archi regolari a tratti).*

DIMOSTRAZIONE: Basterà verificare che per ogni $P \in A$ l'insieme Γ_P dei punti Q per i quali esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A e congiungente P a Q, coincide con l'insieme A. Osserviamo che per ogni $P \in A$ esiste una palla B_P centrata in P e inclusa in A (essendo A

aperto). Poiché A è connesso e Γ_P è non vuoto (esso include B_P!), sarà sufficiente dimostrare che gli insiemi Γ_P e $A\backslash\Gamma_P$ sono entrambi aperti per concludere che allora si ha proprio $\Gamma_P = A$.

Proviamo che Γ_P è aperto. Infatti, se $Q \in \Gamma_P$ allora è evidente che ogni punto di B_Q è congiungibile a P con una curva regolare a tratti. Quindi $B_Q \subset \Gamma_P$ per ogni $Q \in \Gamma_P$, cioè Γ_P è un insieme aperto.

Proviamo che $A\backslash\Gamma_P$ è aperto. Infatti, se $Q \in A\backslash\Gamma_P$ allora non possono esistere punti di B_Q in Γ_P (altrimenti si avrebbe $B_Q \subset \Gamma_P$ e quindi in particolare $Q \in \Gamma_P$, il che è assurdo!), cioè $B_Q \subset A\backslash\Gamma_P$. Per l'arbitrarietà di $Q \in A\backslash\Gamma_P$, si ha che $A\backslash\Gamma_P$ è aperto. □

Possiamo finalmente provare il risultato opposto a quello stabilito in Proposizione 2.4.

PROPOSIZIONE 2.6. *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) un campo continuo e supponiamo che F soddisfi la CIP. Allora F ha un potenziale. Più precisamente siano A_j ($j = 1, \dots$) le componenti connesse di A, si consideri $P_j \in A_j$ e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{C}} F \qquad (\textit{se } P \in A_j)$$

dove $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata, con $C \subset A_j$, congiungente P_j (punto iniziale) a P. Allora φ è un potenziale di F (quello che si annulla nei P_j).

<u>Nota bene:</u> una siffatta curva $\overline{C}$ esiste, quale che sia P, grazie a Proposizione 2.5. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di $\overline{C}$, per Proposizione 2.3. La funzione φ risulta pertanto ben definita.

DIMOSTRAZIONE di Prop.2.6: Senza compromettere la generalità dell'argomento dimostrativo, possiamo supporre $n = 2$. Dimostreremo che $\partial\varphi/\partial x = F_1$ (allo stesso modo si prova che $\partial\varphi/\partial y = F_2$).

Si consideri dunque $P \in A_j$ e sia $\overline{C}$ una curva come sopra. Poiché A_j è aperto, si può trovare r tale che il disco D_r di raggio r e centrato in P sia contenuto in A_j. Se per $|\varepsilon| < r$ indichiamo con Σ_ε il segmento orientato congiungente P a $P + \varepsilon(1, 0)$, parametrizzato da

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto P + t\varepsilon(1, 0),$$

(osserviamo che $\Sigma_\varepsilon \subset D_r \subset A_j$) si trova

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(P + \varepsilon(1,0)) - \varphi(P)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\overline{C}\cup\Sigma_\varepsilon} F - \int_{\overline{C}} F\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} F \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (F \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_0^1 F_1(P + t\varepsilon(1,0))dt \\ &= F_1(P) + \int_0^1 F_1(P + t\varepsilon(1,0)) - F_1(P)dt. \end{aligned}$$

Dalla continuità di F_1 in P segue che esiste $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P)$ e che si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = F_1(P).$$

□

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali la prima implicazione di Proposizione 2.2 si può invertire.

Definizione 2.3. *L'insieme A si dice* stellato *se esiste $P_0 \in A$, detto* centro di A*, tale che il segmento*

$$[P_0; P] := \{P_0 + t(P - P_0) \mid t \in [0,1]\}$$

è contenuto in A per ogni $P \in A$.

Osservazione 2.4. *Valgono i seguenti fatti.*

- *Se A è stellato allora A è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi*
$$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \qquad \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$$
sono connessi e non stellati;
- *Se A è convesso, allora A è stellato;*
- *Si prova, e si intuisce facilmente, che se A è stellato allora A è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. E.g. l'insieme connesso e non stellato $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso.*

Esempi di insiemi stellati, non stellati, semplicemente connessi.

Proposizione 2.7. *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ (con A aperto in $\mathbb{R}^n$) un campo di classe C^1 soddisfacente la CDI. Inoltre supponiamo che ogni componente connessa A_j di A sia un insieme stellato. Allora F ha potenziale. In particolare, se P_j indica un centro di A_j, il potenziale che si annulla nei P_j è dato da*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{[P_j;P]}} F \qquad (\textit{se } P \in A_j)$$

dove l'orientazione del segmento è scelta di modo che P_j ne sia il punto iniziale.

DIMOSTRAZIONE: Come nella dimostrazione di Proposizione 2.6, possiamo ridurci a supporre che $n = 2$ e a provare che $\partial\varphi/\partial x = F_1$.

Considerato $P \in A_j$, come prima possiamo determinare r per cui il disco D_r di raggio r e centro P risulta incluso in A_j.

Osserviamo che se $|\varepsilon| < r$ allora il triangolo chiuso T di vertici

$$P_j, \quad P, \quad Q := P + \varepsilon(1,0)$$

è contenuto in A_j, in quanto A_j è stellato rispetto a P_j. Dal Teorema 1.7 di Green (useremmo invece il Teorema 1.8 di Stokes se stessimo supponendo $n = 3$) otteniamo allora che

$$\int_{\overline{[P_j;Q]}} F + \int_{-\Sigma_\varepsilon} F + \int_{-\overline{[P_j;P]}} F = \int_{\overline{\partial T}} F = \int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

dove Σ_ε è definito esattamente come nella dimostrazione di Proposizione 2.6. Segue subito che

$$\frac{\varphi(P + \varepsilon(1,0)) - \varphi(P)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\overline{[P_j;Q]}} F - \int_{\overline{[P_j;P]}} F\Big) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} F.$$

Si procede ora come nella dimostrazione di Proposizione 2.6. $\square$

Osservazione 2.5. *La Proposizione 2.7 può essere estesa al caso in cui le componenti connesse di A sono semplicemente connesse.*

Esempi.

CHAPTER 3

Derivazione e integrazione complessa

Richiami su numeri complessi, funzioni complesse, limiti di funzioni complesse. Notazioni canoniche: $z = (x, y) = x + iy$ (per i punti), $f = (u, v) = u + iv$ (per le funzioni). Esempi di funzioni complesse, la funzione esponenziale. D'ora in poi Ω denoterà un sottoinsieme aperto di $\mathbf{C}$ ed f una funzione a valori complessi definita e continua in Ω.

DEFINIZIONE 3.1. *La funzione f si dice derivabile (o anche olomorfa) in $z_0 \in \Omega$ se esiste il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

indicato in tal caso con $f'(z_0)$. Se f è derivabile in tutti i punti di Ω, si dice che f è derivabile (oppure olomorfa) in Ω.

Come per le funzioni reali, vale questo risultato.

PROPOSIZIONE 3.1. *Se f è derivabile in $z_0 \in \Omega$, allora f è continua in z_0.*

DIMOSTRAZIONE: Analogamente al caso di una funzione reale, la tesi segue subito osservando che

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

per ogni $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. $\square$

Nel seguente risultato e nel seguito R indica, come in passato, l'operatore di rotazione di $\pi/2$ (in senso antiorario) nel piano, ossia

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto R(x, y) := (-y, x).$$

TEOREMA 3.1. *Data $f = (u, v) : \Omega \to \mathbf{C}$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *La funzione f è derivabile in z_0;*
(2) *Le funzioni u, v sono differenziabili in z_0 e vale*

$$\nabla v(z_0) = R \nabla u(z_0)$$

detta condizione di Cauchy-Riemann (CCR) in z_0.

Inoltre, se f è derivabile in z_0, si ha

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

(da questa e dalla CCR si ottengono poi, ovviamente, altre uguaglianze equivalenti, e.g. $f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$*).*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo prima di tutto che f è derivabile in z_0 se e solo se esistono

$$w = a + ib \in \mathbf{C}, \qquad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z))$$

con $\sigma(z) = o(|z - z_0|)$, o equivalentemente

$$\sigma_1(z) = o(|z - z_0|), \qquad \sigma_2(z) = o(|z - z_0|),$$

tali che

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + \sigma(z).$$

Osserviamo che quest'ultima uguaglianza equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} u(z) = u(z_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \sigma_1(z) \\ v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \sigma_2(z). \end{cases} \tag{41}$$

Segue pertanto che

- Se f è derivabile in z_0, allora vale (41) con $a + ib = f'(z_0)$. Questo implica che u e v sono differenziabili (e quindi derivabili parzialmente) in z_0 e che si ha
$$\nabla u(z_0) = (a, -b), \qquad \nabla v(z_0) = (b, a)$$
da cui segue subito la CCR.
- Viceversa, se u e v sono differenziabili in z_0 e se inoltre vale la CCR, allora il sistema (41) è soddisfatto con
$$a := u_x(z_0), \qquad b := v_x(z_0)$$
e
$$\begin{aligned}\sigma_1(z) &:= u(z) - u(z_0) - \nabla u(z_0) \cdot (z - z_0) = u(z) - u(z_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sigma_2(z) &:= v(z) - v(z_0) - \nabla v(z_0) \cdot (z - z_0) = v(z) - v(z_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|).\end{aligned}$$
Di conseguenza f è derivabile in z_0 e si ha $f'(z_0) = w = a + ib = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

$\square$

Dal Teorema del differenziale totale (dimostrato nei precedenti corsi di analisi matematica) segue immediatamente il seguente corollario.

PROPOSIZIONE 3.2. *Siano u e v derivabili parzialmente in un intorno di $z_0 \in \Omega$. Supponiamo inoltre che i gradienti ∇u e ∇v siano continui in z_0 e che sia verificata la CCR in z_0. Allora f è derivabile in z_0 e si ha*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

In particolare:

Proposizione 3.3. *Se $u, v \in C^1(\Omega)$ e la CCR è soddisfatta in tutti i punti di Ω, allora f è derivabile in Ω e si ha*

$$f' = u_x + iv_x.$$

Esempio: La funzione $\exp : z \mapsto e^z$ è derivabile in $\mathbf{C}$ e si ha $\exp' = \exp$.

Teorema 3.2. *Le seguenti affermazioni, relative a $f = u + iv : \Omega \to \mathbf{C}$, sono equivalenti:*

(1) *La funzione f è derivabile in Ω;*
(2) *La funzione f è derivabile infinite volte in Ω;*
(3) *Si ha $u, v \in C^\infty(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR;*
(4) *Si ha $u, v \in C^1(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR.*

DIMOSTRAZIONE: Che (1) implichi (2) segue subito dalla formula di rappresentazione di Cauchy, di cui tratteremo in seguito (Teorema 3.3).

Assumiamo (2) e dimostriamo (3). A questo scopo, osserviamo che se fissiamo arbitrariamente un intero $n \geq 1$, allora esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Inoltre queste sono differenziabili in Ω, valgono le CCR

$$\nabla \left(\frac{\partial^{j-1} v}{\partial x^{j-1}} \right) = R \nabla \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}} \right) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{42}$$

e si ha

$$f^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + i \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{43}$$

per Teorema 3.1. Tutto questo implica facilmente che $u, v \in C^n(\Omega)$. Per esempio:

- Se $n = 1$ le funzioni u_x e v_x sono continue, per (43) e Proposizione 3.1. A questo punto anche le derivate u_y e v_y sono continue, per (42). Quindi $u, v \in C^1(\Omega)$.
- Analogamente, se $n = 2$ le derivate u_{xx} e v_{xx} sono continue (per (43) e Proposizione 3.1). La continuità di tutte le altre derivate parziali seconde segue subito dal set (42) di CCR.

Infine (3) implica (4) banalmente, mentre (4) implica (1) per il Teorema 3.1. $\square$

Definizione 3.2. *Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice <u>armonica</u> (in Ω) se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \equiv 0$.*

Proposizione 3.4. *Se $f = u + iv$ è derivabile in Ω, allora u e v sono armoniche in Ω.*

DIMOSTRAZIONE: Le funzioni u e v sono di classe C^2 e vale la CCR

$$\nabla v = R \nabla u, \text{ i.e. } \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

per Teorema 3.2. Ricordando anche il Teorema di Schwartz, si ottiene allora

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

da cui $\Delta u \equiv 0$. Analogamente si prova che $\Delta v \equiv 0$. $\square$

Proposizione 3.5. *Sia data una funzione armonica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e supponiamo che le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati (oppure, più debolmente, semplicemente connessi). Allora esiste una funzione armonica $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (detta armonica coniugata di u) tale che $u + iv$ è derivabile in Ω. Essa è un potenziale del campo $R\nabla u$.*

DIMOSTRAZIONE: la prova è (più che) suggerita nell'enunciato stesso. Infatti, per il Teorema 3.1, se v esiste deve soddisfare la CCR, i.e $\nabla v = R\nabla u$. Ma una tale v esiste di sicuro, grazie alla Proposizione 2.7 e osservando che il campo $R\nabla u$, essendo u armonica, soddisfa la CDI. $\square$

Come facile conseguenza di Proposizione 3.5 e di Teorema 3.2, si ha il seguente risultato.

Corollario 3.1. *Se u è armonica in Ω, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia D un disco qualsiasi incluso in Ω. Allora, per Proposizione 3.5, esiste v armonica in D tale che $u + iv$ è derivabile in D. Il Teorema 3.2 implica allora che u è di classe C^∞ in D. La conclusione segue, ovviamente, dall'arbitrarietà di D. $\square$

Prima di enunciare e dimostrare il prossimo risultato, definiamo l'integrale di una funzione complessa.

Definizione 3.3. *Sia f continua in Ω e sia $\overline{C}$ una curva regolare a tratti orientata, con $C \subset \Omega$. Definiamo allora*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz := \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds \tag{44}$$

Osservazione 3.1. *La definizione di integrale complesso (44) sarà essenziale per ricondurre la dimostrazione dei prossimi risultati al contesto del potenziale, per via dei seguenti due fatti:*

1. *La funzione $u + iv$ soddisfa CCR se e solo se i campi $(u, -v)$ e (v, u) soddisfano CDI;*
2. *La funzione f soddisfa la naturale "condizione di indipendenza dal percorso" (che preciseremo in Definizione 3.4) se e solo se i campi $(u, -v)$ e (v, u) soddisfano CIP.*

Coerenza con le "regole formali" della notazione di Leibniz.

Il seguente facile risultato è spesso utile nel calcolo esplicito di integrali.

Proposizione 3.6. *Nelle ipotesi di Definizione 3.3, sia $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una parametrizzazione regolare a tratti di $\overline{C}$. Allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

dove il prodotto nell'integrando del secondo membro è quello complesso e dove si sottintende la seguente definizione di integrale di $\alpha + i\beta : [a, b] \to \mathbf{C}$ (con α e β continue)

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t))dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i \int_a^b \beta(t)dt.$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right)\left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) + i\left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt + i\int_a^b \left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\right) \bullet \gamma'(t)dt + i\int_a^b \left(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\right) \bullet \gamma'(t)dt \\
&= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i\int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds.
\end{aligned}$$

□

Proveremo ora un risultato che corrisponde, nel contesto dei campi, a Proposizione 2.2.

PROPOSIZIONE 3.7. *Se esiste una primitiva F di f (in Ω), allora*

(1) *La funzione f è derivabile in Ω (i.e. $u, v \in C^1(\Omega)$ e vale la CCR, per Teorema 3.2);*
(2) *Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset \Omega$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = F(Q) - F(P).$$

DIMOSTRAZIONE: (1) Poiché F è derivabile, il Teorema 3.2 implica che anche $F' = f$ è derivabile.

(2) Sia $F = U + iV$. Allora $U, V \in C^\infty(\Omega)$, vale la CCR

$$\nabla V = R\nabla U, \text{ i.e. } \begin{cases} V_x = -U_y \\ V_y = U_x \end{cases}$$

e

$$u + iv = U_x + iV_x$$

per Teorema 3.1 e Teorema 3.2. Segue subito che U è un potenziale del campo $(u, -v)$ e che V è un potenziale del campo (v, u). Dalla (2) di Proposizione 2.2, otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{C}} f(z)dz &= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i\int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds \\
&= U(Q) - U(P) + i\left(V(Q) - V(P)\right) \\
&= F(Q) - F(P).
\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 3.2. *(Confrontare con l'osservazione che segue la Proposizione 2.2). La derivabilità di f non implica, in generale, che esista una primitiva di f. Per esempio, la funzione*

$$f(z) := \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega := \mathbf{C}\backslash\{0\}$$

è derivabile in Ω ma, come stiamo per verificare, non è dotata di primitive in Ω. Infatti , se $\overline{C}$ indica il circolo parametrizzato da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t) = e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si ha

$$\int_{\overline{C}} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = 2\pi i. \tag{45}$$

D'altra parte se f avesse una primitiva F, dovremmo avere anche

$$\int_{\overline{C}} \frac{1}{z}\,dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0$$

per (2) di Proposizione 3.7. Si rimuove l'assurdo ammettendo che f non ha primitiva.

Osserviamo che

$$\int_{\overline{C}} (v,u) = 2\pi \neq 0$$

per (45). In altri termini, il campo (v,u) non è conservativo pur soddisfacendo CDI (come discende subito da CCR che vale in quanto f è derivabile). In effetti tale campo coincide proprio con quello indicato nell' osservazione menzionata sopra, fatta nell'ambito della teoria del potenziale. Infatti si ha

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

e cioè

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Definizione 3.4. *Si dice che una funzione continua $f : \Omega \to \mathbf{C}$ soddisfa la condizione di indipendenza dal percorso (CIP) se per ogni coppia ordinata (P,Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di Ω e per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset \Omega$, l'integrale*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz$$

dipende solo da (P,Q).

Per provare i due sottostanti risultati sull'esistenza della primitiva, ci servirà il seguente lemma.

Proposizione 3.8. *Se U è un potenziale del campo $(u,-v)$ e se V è un potenziale di (v,u), allora $F := U + iV$ è derivabile e si ha $F' = f$.*

DIMOSTRAZIONE: La derivabilità di F seguirà subito dal Teorema 3.1, una volta dimostrato che F soddisfa la CCR. In effetti, si ha che $U,V \in C^1(\Omega)$ e vale

$$R\nabla U = R(u,-v) = (v,u) = \nabla V.$$

Infine, sempre per Teorema 3.1, si trova

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

□

Proposizione 3.9. *Supponiamo che $f : \Omega \to \mathbf{C}$ sia continua e soddisfi CIP. Allora f ha una primitiva. Più precisamente: $(u,-v)$ ha un potenziale U, (v,u) ha un potenziale V e $U+iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché vale CIP e, per definizione, si ha

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_{\overline{C}} (u,-v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v,u) \bullet ds,$$

segue subito che i campi $(u,-v)$ e (v,u) sono conservativi in Ω (Proposizione 2.3) e quindi hanno un potenziale (Proposizione 2.6). La conclusione segue subito da Proposizione 3.8. $\square$

Come conseguenza immediata di Proposizione 3.9, Proposizione 3.7(1) e Teorema 3.2, si ottiene il seguente

COROLLARIO 3.2. *Se $f : \Omega \to \mathbf{C}$ è continua e soddisfa CIP, allora f è derivabile infinite volte.*

Dimostreremo adesso un risultato che "corrisponde" alla Proposizione 2.7 della teoria del potenziale. Esso afferma che, proprio sotto le ipotesi supplementari assunte sul dominio in Proposizione 2.7, la prima implicazione di Proposizione 3.7 si può invertire.

PROPOSIZIONE 3.10. *Supponiamo che la funzione f sia derivabile in Ω e che ogni componente connessa di Ω sia un insieme stellato. Allora f ha una primitiva. Più precisamente: $(u,-v)$ ha un potenziale U, (v,u) ha un potenziale V e $U+iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: Da Teorema 3.2 segue che le funzioni u e v sono di classe C^1 in Ω e che vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Questo implica subito che i campi $(u,-v)$ e (v,u) soddisfano la CDI. Quindi, per Proposizione 2.7 tali campi hanno un potenziale. Come per Proposizione 3.9, la conclusione segue da Proposizione 3.8. $\square$

OSSERVAZIONE 3.3. *Grazie all'osservazione che segue la dimostrazione di Proposizione 2.7, la Proposizione 3.10 si può estendere al caso di insiemi le cui componenti connesse siano semplicemente connesse.*

Il seguente risultato ci servirà fra poco per dimostrare la formula di rappresentazione integrale di Cauchy. Osserviamo che esso non prescrive alcuna restrizione sul genere topologico di Ω. Peraltro, nel caso in cui le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati, tale proposizione deriva immediatamente dalla combinazione di Proposizione 3.10 e Proposizione 3.7(2).

PROPOSIZIONE 3.11. *Consideriamo un sottoinsieme aperto E di Ω tale che ∂E sia una curva regolare a tratti, con $\partial E \subset \Omega$. Sia inoltre f una funzione derivabile in Ω. Allora*

$$\int_{\partial E} f(z)dz = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Per Teorema 3.1 vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Allora, da una versione sufficientemente generale della formula di Green (NB: Le funzioni u e v risultano essere differenziabili, ma non necessariamente di classe C^1. Tuttavia ∇u e ∇v sono misurabili e inoltre, essendo valida la CCR, si ha $\partial(-v)/\partial x - \partial u/\partial y = \partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0$), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} f(z)dz &= \int_{\partial E}(u,-v)\bullet ds + i\int_{\partial E}(v,u)\bullet ds\\ &= \int_E\left(\frac{\partial(-v)}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\int_E\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione integrale di Cauchy.

TEOREMA 3.3. *Siano E ed f come in Proposizione 3.11. Allora, per ogni $w \in E$, si ha*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia D_ε il disco di raggio ε centrato in w. Supporremo ε sufficientemente piccolo, di modo che $D_\varepsilon \subset E$. Poiché $z \mapsto f(z)/(z-w)$ è derivabile in $\Omega\backslash\{w\}$, dalla Proposizione 3.11 segue che

$$0 = \int_{\partial(E\backslash D_\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz - \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

Parametrizzando ∂D_ε con

$$\gamma(t) := w + \varepsilon e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e ricordando Proposizione 3.7, si ottiene allora

$$\int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_0^{2\pi}\frac{f(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt$$

per ogni ε sufficientemente piccolo. A questo punto la conclusione segue subito osservando che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt = 2\pi f(w) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)\,dt = 2\pi f(w)$$

per la continuità di f in w. □

OSSERVAZIONE 3.4. *Come affermato nella dimostrazione di Teorema 3.2, dalla formula di Cauchy segue che una funzione derivabile in Ω è derivabile infinite volte in Ω. Vale infatti il seguente facile corollario di Teorema 3.3 (dimostrazione per induzione).*

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano E ed f come in Proposizione 3.11. Allora f è derivabile indefinitamente in E e vale la formula*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial E}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \quad w \in E \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esempi.

Bibliography

[1] G. Alberti: A Lusin Type Theorem for Gradients. J. Funct. Anal. **100**, 110-118 (1991).
[2] S. Campanato: Lezioni di Analisi Matematica, 2^a parte. Libreria Scientifica Pellegrini, Pisa.
[3] E. Giusti: Analisi Matematica 2. Bollati Boringhieri.