Analisi Matematica 2
per il Corso di Laurea in Matematica
(a.a. 2014/15)
DIARIO

Silvano Delladio

May 29, 2015

Contents

CHAPTER 1

Successioni e serie di funzioni

[* Prima settimana (16/02/2015); 6 *]

1. Successioni di funzioni

Definizione 1.1. *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni. Allora l'insieme*

$$D := \left\{ x \in X \,\middle|\, \text{esiste finito } \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right\}$$

è detto "insieme di convergenza" di $\{f_n\}$. La funzione

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

è detta "(funzione) limite puntuale di $\{f_n\}$"e si scrive: $f_n \to f$ in D.

Definizione 1.2. *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni. Allora si dice che "$\{f_n\}$ converge uniformemente in un sottoinsieme E di X a una funzione f" se f è definita nei punti di E e se*

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Osservazione 1.1. Se $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) converge uniformemente a f in $E \subset \mathbb{R}$ allora f_n converge puntualmente a f in E, cioè $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.

Esempio 1.1. La successione

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

ha come insieme di convergenza $D := (-1, 1]$ e come funzione limite

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Inoltre $\{f_n\}$ converge uniformemente in ogni sottoinsieme chiuso di $(-1, 1)$, ma non converge uniformemente in $(-1, 1)$ e quindi nemmeno in $(-1, 1]$.

Proposizione 1.1 (**). *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni che converge uniformemente alla funzione f in $E \subset X$. Se le funzioni f_n sono continue in E allora anche f è continua in E.*

Osservazione 1.2. Il fatto che la successione in Esempio 1.1 non converga uniformemente in $(-1, 1]$ segue anche da Proposizione 1.1.

OSSERVAZIONE 1.3. Esempio 1.1 mostra che l'ipotesi di convergenza uniforme assunta in Proposizione 1.1 non può essere sostituita da quella di convergenza puntuale. Sotto questa ipotesi più semplice la continuità non passa al limite nemmeno quando $E = \mathbb{R}$. Per esempio, se

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ nx & \text{se } x \in (0, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, +\infty) \end{cases}$$

allora $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente alla funzione caratteristica di $(0, +\infty)$ in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.3. *Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$). Allora una "norma (di V)" è una funzione*

$$V \to [0, +\infty), \quad v \mapsto \|v\|$$

con le seguenti proprietà

(i) $\|v\| \geq 0$ *per ogni* $v \in V$. *Inoltre* $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$;
(ii) *Per ogni* $v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *si ha* $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ *(omogeneità);*
(iii) *Per ogni* $u, v \in V$ *si ha* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(disuguaglianza triangolare).*

Lo spazio vettoriale V equipaggiato con una siffatta funzione si chiama "spazio vettoriale normato" e si indica con $(V, \|\cdot\|)$.

DEFINIZIONE 1.4. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e sia $\{v_n\}$ una successione in V. Allora*

(1) *Si dice che "$\{v_n\}$ converge in $(V, \|\cdot\|)$ (o più semplicemente in V)" se esiste $v \in V$ tale che*
$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\| = 0.$$
In tal caso si dice anche che "v è limite della successione $\{v_n\}$" (o che "$\{v_n\}$ converge a v") e si scrive $v_n \to v$, o anche $v = \lim_{n \to +\infty} v_n = v$;

(2) *Si dice che $\{v_n\}$ è una "successione di Cauchy in V" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon)$ tale che*
$$\|v_m - v_n\| \leq \varepsilon \text{ per ogni } m, n \geq N(\varepsilon).$$

PROPOSIZIONE 1.2 (*). *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Allora ogni successione $\{v_n\}$ che converge in V ha un solo limite ed è di Cauchy.*

DEFINIZIONE 1.5. *Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto "completo" (o anche "spazio di Banach") se ogni successione di Cauchy in V converge in V.*

PROPOSIZIONE 1.3 (**). *Ogni spazio vettoriale normato di dimensione finita è uno spazio di Banach.*

PROPOSIZIONE 1.4 (*). *Sia W un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach $(V, \|\cdot\|)$. Allora $(W, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.*

Proposizione 1.5 (*). *Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora l'insieme*

$$L^\infty(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \,\Big|\, \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty \right\}$$

con le ordinarie operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare delle funzioni è uno spazio vettoriale. Inoltre la mappa

$$L^\infty(E) \to [0, +\infty), \quad f \mapsto \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è una norma, indicata con $\| \cdot \|_{\infty,E}$.

Proposizione 1.6 (*). *Sia $E \subset X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ una successione di funzioni. Allora:*

(1) *Se $\{f_n\}$ converge uniformemente in E a $f \in L^\infty(E)$, allora $f_n|_E \in L^\infty(E)$ definitivamente e $f_n|_E \to f$ in $L^\infty(E)$;*
(2) *Sia $f_n|_E \in L^\infty(E)$ per ogni n e sia $f \in L^\infty(E)$. Se $f_n|_E \to f$ in $L^\infty(E)$, allora f_n converge uniformemente in E a f.*

Osservazione 1.4. La convergenza uniforme in E è più generale di quella in $L^\infty(E)$. Per esempio, consideriamo la successione $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ definita come segue

$$f_n(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{n}, \qquad x \in (0,1)$$

e sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,1).$$

Allora f_n converge uniformemente a f in $(0,1)$, ma

$$f, f_n \notin L^\infty\big((0,1)\big).$$

Proposizione 1.7 (**). *Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora:*

(1) *$(L^\infty(E), \| \cdot \|_{\infty,E})$ è uno spazio di Banach;*
(2) *$C_b(E) := C(E) \cap L^\infty(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $(L^\infty(E), \| \cdot \|_{\infty,E})$. Quindi $(C_b(E), \| \cdot \|_{\infty,E})$ è uno spazio di Banach (N.B.: Se E è compatto si ha $C_b(E) = C(E)$).*

Osservazione 1.5. Esistono spazi vettoriali normati non completi (osserviamo che tali spazi non possono avere dimensione finita, per Proposizione 1.3). Per esempio, consideriamo l'insieme dei polinomi a cofficienti reali in $(0, 1/2)$, cioè

$$\mathcal{P} := \{ f|_{(0,1/2)} \mid f \in \mathbb{R}[x] \}.$$

Allora $\mathcal{P}$ è un sottospazio vettoriale di $L^\infty((0,1/2))$. Consideriamo la successione $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$ con

$$f_n(x) := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n, \quad x \in (0, 1/2).$$

Osserviamo che (per ogni m, n con $m > n \geq 0$):

$$f_m(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1 + \ldots + x^{m-n-1}) = \frac{x^{n+1}(1 - x^{m-n})}{1 - x}$$

da cui si ottiene

$$\|f_m - f_n\|_{\infty,(0,1/2)} \leq \frac{1/2^{n+1}}{1/2} = \frac{1}{2^n}.$$

Ne segue che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$, quindi anche in $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$. Per Proposizione 1.7 esiste $f \in L^\infty((0, 1/2))$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,(0,1/2)} = 0.$$

Ma tale f può essere calcolata esplicitamente. Infatti essa deve essere anche il limite puntuale delle f_n, per cui e in effetti sappiamo che

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (1 + x + \ldots + x^n) = \frac{1}{1 - x}$$

per ogni $x \in (0, 1/2)$. Si vede così che $f \notin \mathcal{P}$.

[* Seconda settimana (23/02/2015); 12 *]

Dalla formula di Taylor con resto in forma integrale, otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 1.8 (*). *Si considerino $f \in C^\infty(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$, dove (a, b) è un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Si supponga inoltre che esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\sup_{x\in(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

per n sufficientemente grande. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} T_{x_0,n} = f \text{ in } (L^\infty(a, b), \|\cdot\|_{\infty,(a,b)})$$

dove $T_{x_0,n}$ indica il polinomio di Taylor di grado n con centro in x_0, cioè

$$T_{x_0,n}(x) := f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Esempi. $\exp, \cos, \sin$.

Vale il seguente teorema di passaggio al limite nell'integrale.

Proposizione 1.9 (*). *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente in $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Come corollario otteniamo anche questo risultato sul passaggio al limite della derivata.

Proposizione 1.10 (*). *Consideriamo una successione* $\{f_n\} \subset C^1([a,b])$ *tale che:*

(i) $\{f_n\}$ *converge puntualmente in* $[a,b]$. *Sia* f *il limite;*

(ii) $\{f'_n\}$ *converge in* $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$. *Sia* g *il limite.*

Allora $f \in C^1([a,b])$ *e più precisamente si ha* $f' = g$.

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 9.7 e 9.8].

2. Serie di funzioni generiche

Definizione 2.1. *In uno spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$, *consideriamo una successione* $\{v_j\} \subset V$ *e poniamo*

$$S_N := \sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (N = 1, 2, \dots).$$

Diremo allora che:

(1) *"La serie dei* v_j *converge (semplicemente in* V*)" se la successione* $\{S_N\}$ *converge (in* V*). In tal caso poniamo*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} v_j := \lim_{N\to+\infty} S_N \quad (\in V);$$

(2) *"La serie dei* v_j *converge totalmente (in* V*)" se la serie dei* $\|v_j\|$ *converge (in* $\mathbb{R}$*), cioè se* $\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \|v_j\| < +\infty$.

Proposizione 2.1 (*). *Consideriamo uno spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ *e una successione* $\{v_j\} \subset V$. *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se la serie dei* v_j *converge semplicemente in* V, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N(\varepsilon) > 0$ *tale che*

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{n+k} v_j \right\| \le \varepsilon, \ \text{ogni volta che } n \ge N(\varepsilon) \text{ e } k \ge 1; \tag{2.1}$$

(2) *Se* $(V, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach e se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N(\varepsilon) > 0$ *tale che vale* (2.1), *allora la serie dei* v_j *converge semplicemente in* V*;*

(3) *Se* $(V, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach e se la serie dei* v_j *converge totalmente in* V *allora tale serie converge anche semplicemente in* V.

Da Proposizione 1.7 e da Proposizione 2.1 seguono subito i seguenti risultati.

Proposizione 2.2 (°). *Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $\{f_j\}$ una successione in $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$. Allora la serie delle f_j converge semplicemente in $L^\infty(E)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) > 0$ tale che*

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j \right\|_{\infty,E} \leq \varepsilon, \text{ ogni volta che } n \geq N(\varepsilon) \text{ e } k \geq 1.$$

Inoltre, se la serie delle f_j converge totalmente in $L^\infty(E)$ allora tale serie converge anche semplicemente in $L^\infty(E)$.

Proposizione 2.3 (°). *Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $\{f_j\}$ una successione in $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$. Allora la serie delle f_j converge semplicemente in $C_b(E)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) > 0$ tale che*

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j \right\|_{\infty,E} \leq \varepsilon, \text{ ogni volta che } n \geq N(\varepsilon) \text{ e } k \geq 1.$$

Inoltre, se la serie delle f_j converge totalmente in $C_b(E)$ allora tale serie converge anche semplicemente in $C_b(E)$.

Da Proposizione 1.8 si ottiene subito il seguente teorema di integrazione per serie.

Proposizione 2.4 (°). *Sia $\{f_j\}$ una successione in $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$ tale che la serie delle f_j converga in $C([a,b])$. Allora*

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{+\infty} f_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_a^b f_j.$$

Da Proposizione 1.10 segue poi immediatamente il seguente risultato di derivazione per serie.

Proposizione 2.5 (°). *Sia $\{f_j\}$ una successione in $C^1([a,b])$ tale che:*

(i) *La serie delle f_j converge puntualmente in $[a,b]$. Sia F il limite;*

(ii) *La serie delle f_j' converge in $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$.*

Allora $F \in C^1([a,b])$ e più precisamente si ha

$$F' = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j'.$$

Per concludere questa sezione, osserviamo che Proposizione 1.8 può essere rienunciata in termini di serie di potenze come segue.

Proposizione 2.6 (°). *Si considerino $f \in C^\infty(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, dove (a,b) è un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Si supponga inoltre che esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\sup_{x\in(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

per n sufficientemente grande. Allora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

converge a f in $(L^\infty(a,b), \|\cdot\|_{\infty,(a,b)})$. Tale serie è detta "serie di Taylor di f di centro x_0".

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 9.9]; [**5**, Sez. 2.1].

3. Serie di potenze I

Proposizione 3.1 (*). *Per una serie di potenze*

$$a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j \qquad (a_j \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

valgono le seguenti proprietà:

(1) *Se (3.1) converge in un punto $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, allora essa converge totalmente in $(C([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r < |y|$;*

(2) *L'insieme in cui la serie converge è del tipo $(-R,R)$, oppure $[-R,R)$, oppure $(-R,R]$, oppure $[-R,R]$, dove*

$$R := \sup\{|y| \mid \text{la serie (3.1) converge in } y\}.$$

Tale numero è detto "raggio di convergenza della serie di potenze (3.1)";

(3) *Se $R > 0$, la funzione*

$$x \mapsto a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j, \quad x \in (-R,R)$$

è continua.

[* Terza settimana (02/03/2015); 18 *]

Osservazione 3.1. I seguenti esempi mostrano che in effetti, per una serie di potenze, si possono presentare tutti e quattro i casi di insieme di convergenza menzionati nel punto (2) di Proposizione 3.1:

- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $(-1,1)$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $[-1,1)$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $(-1,1]$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $[-1,1]$.

4. Digressione su $\liminf$ e $\limsup$

Consideriamo una successione $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali e poniamo

$$A_m^- := \inf_{n \geq m} a_n, \quad A_m^+ := \sup_{n \geq m} a_n \qquad (m \geq 1).$$

Allora $\{A_m^-\}$ è una successione crescente, mentre $\{A_m^+\}$ è una successione decrescente. Inoltre

$$A_m^- \leq A_m^+ \qquad \text{(per ogni } m\text{)}.$$

Definizione 4.1. *Il "limite inferiore (per $n \to +\infty$) di $\{a_n\}$" e il "limite superiore (per $n \to +\infty$) di $\{a_n\}$ sono definiti, rispettivamente, come segue:*

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n := \sup_m A_m^- = \lim_{m \to +\infty} A_m^-$$

e

$$\limsup_{n \to +\infty} a_n := \inf_m A_m^+ = \lim_{m \to +\infty} A_m^+.$$

Proposizione 4.1 (*). *Posto per semplicità*

$$A^+ := \limsup_{n \to +\infty} a_n$$

valgono le seguenti proprietà.

(1) *Se $A^+ < K \leq +\infty$, allora $a_n \leq K$ definitivamente;*
(2) *Se $A^+ > H \geq -\infty$, allora $a_n \geq H$ per infiniti n.*

Simmetricamente, posto

$$A^- := \liminf_{n \to +\infty} a_n$$

si ha

(3) *Se $A^- > H \geq -\infty$, allora $a_n \geq H$ definitivamente;*
(4) *Se $A^- < K \leq +\infty$, allora $a_n \leq K$ per infiniti n.*

PROPOSIZIONE 4.2 (**). *Valgono i seguenti fatti.*

(1) $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;
(2) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = -\liminf_{n\to+\infty}(-a_n)$;
(3) *Queste affermazioni sono equivalenti:*
   – *Il limite* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *esiste ed è uguale a* L;
   – *Si ha* $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = L$.

In pratica risulta talvolta utile la seguente facile proposizione (lasciata per esercizio).

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione tale che:*

(i) *Esiste una sottosuccessione* $\{a_{n_j}\}$ *convergente a* $L \in (-\infty, +\infty]$;
(ii) *Per ogni* $n \notin \{n_j\}$ *si ha* $a_n \leq L$.

Allora

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = L.$$

ESEMPIO 4.1. (Cfr. [**5**, Es. 26, Sez. 2.2]) Sia

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{3/n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Allora si può applicare Proposizione 4.3 con $n_j = 2j+1$. Infatti si ha

$$\lim_{j\to+\infty} a_{2j+1} = \lim_{j\to+\infty} j^{3/(2j+1)} = 1$$

e inoltre per ogni n pari vale $a_n = 0 \leq 1$. Si conclude così che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$.

*** Esercizi suggeriti:** [**3**, Sez. 2.10].

5. Serie di potenze II

PROPOSIZIONE 5.1 (**). *Sia data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad (a_n \in \mathbb{R}) \tag{5.1}$$

con raggio di convergenza R *e poniamo*

$$\rho := \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Allora

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho = +\infty, \\ \frac{1}{\rho} & \text{se } \rho \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } \rho = 0. \end{cases}$$

Inoltre, se per n sufficientemente grande si ha $a_n \neq 0$ ed esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

allora tale limite coincide con ρ.

Osservazione 5.1. In generale (se $a_n \neq 0$ definitivamente), non è detto che valga una delle uguaglianze

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \qquad \liminf_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

Un esempio è dato dalla serie

$$x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 6x^6 + \dots$$

per la quale si ha $\rho = 1$ e

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty, \qquad \liminf_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$$

Proposizione 5.2 (**). *Le due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Osservazione 5.2. Le due serie di potenze considerate in Proposizione 5.2 possono comportarsi in modo differente negli estremi $\pm R$ dell'insieme di convergenza. Per esempio gli insiemi di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

sono $[-1, 1)$ e $(-1, 1)$, rispettivamente.

Da Proposizione 2.5, Proposizione 3.1 e Proposizione 5.2 segue subito il seguente risultato sulla derivazione delle serie di potenze.

Proposizione 5.3 (**). *Sia data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Allora la funzione

$$x \mapsto F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

appartiene a $C^\infty(-R,R)$ *e (per ogni* $k \geq 1$*) si ha*

$$F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad x \in (-R,R).$$

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 9.3]; [**5**, Sez. 2.2].

CHAPTER 2

Limiti e continuità di funzioni

1. Elementi di topologia

Parole evocative da riferire agli insiemi e ai punti:

- gli aggettivi "isolato", "chiuso", "interno"($\rightarrow$ punto isolato, insieme chiuso, punto interno [di un insieme]);
- i sostantivi "accumulazione", "frontiera" ($\rightarrow$ punto di accumulazione, frontiera di un insieme).

DEFINIZIONE 1.1. *Se $E \subset \mathbb{R}^n$, allora:*

(1) *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice "punto di accumulazione per E" se*
$$\Big(B(x,r) \setminus \{x\}\Big) \cap E \neq \emptyset, \text{ per ogni } r > 0.$$
Con $\mathcal{A}_E$ si indicherà l'insieme dei punti di accumulazione per E;

(2) *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice "punto isolato di E" se per $r > 0$ sufficientemente piccolo si ha $B(x,r) \cap E = \{x\}$. Con $\mathcal{I}_E$ si indicherà l'insieme dei punti isolati di E.*

PROPOSIZIONE 1.1 (*). *Se $E \subset \mathbb{R}^n$, allora:*

(1) $\mathcal{I}_E \subset \mathcal{A}_{E^c}$ *(e quindi anche $\mathcal{I}_{E^c} \subset \mathcal{A}_E$);*
(2) $x \in \mathcal{A}_E$ *se e soltanto se esiste una successione $j \mapsto x_j \in E \setminus \{x\}$ tale che $x_j \to x$.*

[* Quarta settimana (09/03/2015); 24 *]

DEFINIZIONE 1.2. *Se $E \subset \mathbb{R}^n$, allora:*

(1) *Si dice che E è "chiuso" se $\mathcal{A}_E \subset E$;*
(2) *Si chiama "frontiera di E" l'insieme $\partial E := (\mathcal{A}_E \cap \mathcal{A}_{E^c}) \cup \mathcal{I}_E \cup \mathcal{I}_{E^c}$;*

(3) *Si chiama "chiusura di E" l'insieme* $\overline{E} := E \cup \mathcal{A}_E$.

PROPOSIZIONE 1.2 (*). *Se* $E \subset \mathbb{R}^n$*, allora:*

(1) $\partial E = \partial E^c$;

(2) E *è chiuso se e soltanto se per ogni* $x \in E^c$ *esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x, r) \subset E^c$;

(3) E *è chiuso se e solo se* $E = \overline{E}$;

(4) E *è chiuso se e solo se per ogni successione* $j \mapsto x_j \in E$ *convergente a* x *si ha* $x \in E$.

DEFINIZIONE 1.3. *Se* $E \subset \mathbb{R}^n$*, allora:*

(1) *Si dice che* $x \in \mathbb{R}^n$ *è un "punto interno di E" se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x, r) \subset E$. *L'insieme dei punti interni di E è chiamato "parte interna di E" ed è indicato con* $\operatorname{int} E$ *(o anche* E°*);*

(2) *Si dice che l'insieme E è "aperto" se* E^c *è chiuso.*

Grazie a Definizione 1.3 e al secondo statement di Proposizione 1.2 vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.3 ($*$). *Un sottoinsieme E di* $\mathbb{R}^n$ *è aperto se e solo se* $E = \operatorname{int} E$.

PROPOSIZIONE 1.4 (**). *Se* $E \subset \mathbb{R}^n$*, si ha:*

(1) $\operatorname{int} E = (\mathcal{I}_{E^c})^c \cap (\mathcal{A}_{E^c})^c$;

(2) $\overline{E} = E \cup \partial E$;

(3) $\partial E = \big(\operatorname{int} E \cup \operatorname{int} E^c\big)^c$.

Il seguente risultato è noto come "Teorema di Bolzano-Weierstrass".

PROPOSIZIONE 1.5 (**). *Se E è sottoinsieme limitato e infinito di* $\mathbb{R}^n$*, allora* $\mathcal{A}_E \neq \emptyset$.

PROPOSIZIONE 1.6 (**). *Sia* $E \subset \mathbb{R}^n$ *con* $\#(E) = \infty$. *Le due seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *E è chiuso e limitato;*

(2) *Ogni successione di E ha una sottosuccessione convergente a un punto di E.*

DEFINIZIONE 1.4. *Un sottoinsieme E di* $\mathbb{R}^n$ *(non necessariamente infinito) che verifica una delle due proprietà (equivalenti) di Proposizione 1.6 si dice "insieme compatto".*

Ricordiamo il seguente risultato provato nel corso di Analisi Matematica 1.

PROPOSIZIONE 1.7. *Se E è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$, allora esistono i numeri $\max E$ e $\min E$ (cioè $\sup E \in E$ e $\inf E \in E$).*

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 10.3, 10.4 e 10.10].

DEFINIZIONE 1.5. *Se $x \in \mathbb{R}^n$, si chiama "intorno di x (in $\mathbb{R}^n$)" ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente x. Si chiama "intorno di ∞ (in $\mathbb{R}^n$)" ogni sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ tale che $A^c \subset B(0, R)$ per R sufficientemente grande.*

Grazie a Definizione 1.5 le nozioni di successione convergente e di punto di accumulazione possono essere generalizzate.

DEFINIZIONE 1.6. *Si dice che una successione $j \mapsto x_j \in \mathbb{R}^n$ "tende a $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, e si scrive $x_j \to \overline{x}$, se per ogni intorno A di $\overline{x}$ si ha $x_j \in A$ definitivamente.*

DEFINIZIONE 1.7. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Allora si dice che $\overline{x}$ è un "punto di accumulazione per E" se ogni intorno di $\overline{x}$ contiene punti di E diversi da $\overline{x}$. Con $\mathcal{A}_E$ si indica l'insieme dei punti di accumulazione per E.*

OSSERVAZIONE 1.1. Effettivamente, per $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha che Definizione 1.6 si riduce alla nozione di convergenza usuale. Se invece $\overline{x} = \infty$ si ha che $x_j \to \overline{x}$ se e solo se per ogni $R > 0$ esiste $N(R) > 0$ tale che $|x_j| \geq R$, per ogni $j \geq N(R)$. Analogamente, per $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha che Definizione 1.7 si riduce a (1) in Definizione 1.1. Se invece $\overline{x} = \infty$ si ha che $\overline{x}$ è di accumulazione per E se e solo se per ogni $R > 0$ esiste $x \in E$ tale che $|x| \geq R$ (il che equivale a dire che E non è limitato).

2. Funzioni continue

PROPOSIZIONE 2.1 (*). *Si considerino un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x} \in \mathcal{A}_E$ e $\overline{y} \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *Per ogni intorno V di $\overline{y}$ esiste un intorno U di $\overline{x}$ tale che $f(U \cap E) \subset V$;*
(2) *Per ogni successione $j \mapsto x_j \in E$ tale che $x_j \to \overline{x}$ si ha $f(x_j) \to \overline{y}$.*

Inoltre, nel caso particolare che $\overline{x} \in \mathcal{A}_E \cap \mathbb{R}^n$ e $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ tali affermazioni equivalgono alla seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $|x - \overline{x}| \leq \delta(\varepsilon)$ e $x \in E$ allora $|f(x) - \overline{y}| \leq \varepsilon$.

DEFINIZIONE 2.1. *Siano dati un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x} \in \mathcal{A}_E$ e $\overline{y} \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Se si verifica una delle due condizioni equivalenti (1) e (2) di Proposizione 2.1, allora si dice che "$\overline{y}$ è il limite per x che tende a $\overline{x}$ di $f(x)$" e si scrive*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \overline{y}.$$

Definizione 2.2. *Siano dati un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}^n$*, una funzione* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *e* $\overline{x} \in E$*. Si dice allora che* f *è continua in* $\overline{x}$ *nei seguenti casi alternativi:*

(i) $\overline{x} \in \mathcal{I}_E$;
(ii) $\overline{x} \in \mathcal{A}_E$ *e si ha* $f(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$.

Se f *è continua in tutti i punti di* E *si dice semplicemente che "*f *è continua (in* E*)". Si dice che "*f *è uniformemente continua (in* E*)" se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tale che* $|f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon$ *ogni volta che* $x, \overline{x} \in E$ *e vale* $|x - \overline{x}| \leq \delta(\varepsilon)$.

Osservazione 2.1. Naturalmente, i teoremi sulla continuità delle funzioni che si ottengono combinando variamente funzioni continue di una variabile reale si estendono banalmente alle funzioni di più variabili reali (e.g. la somma e il prodotto di funzioni continue in un punto sono a loro volta funzioni continue in quel punto).

[* Quinta settimana (16/03/2015); 30 *]

Proposizione 2.2 (**). *Siano* E *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *una funzione continua. Allora* $f(E)$ *è un insieme compatto.*

Da Proposizione 1.7 e Proposizione 2.2 segue subito il seguente risultato (Teorema di Weierstrass).

Proposizione 2.3 (°). *Siano* E *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *assume valore massimo e valore minimo, cioè esistono* $x_m, x_M \in E$ *tali che*

$$f(x_m) = \inf_E f := \inf f(E), \quad f(x_M) = \sup_E f := \sup f(E).$$

Il seguente risultato è noto come Teorema di Heine-Cantor.

Proposizione 2.4 (**). *Siano* E *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *una funzione continua. Allora* f *è uniformemente continua.*

*** Esercizi suggeriti:** [**1**, Sez. 7.1], [**2**, Es. 10.8, 10.9, 10.13, 10.15, 10.16], [**5**, Sez. 4.1].

CHAPTER 3

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

1. Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabili

DEFINIZIONE 1.1. *Si considerino una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, con $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in \operatorname{int} E$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora si dice che "$f$ è derivabile in x_0 secondo la direzione v", se la seguente funzione (che è ben definita per ε sufficientemente piccolo)*

$$g(t) := f(x_0 + tv), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

è derivabile in 0*. In tal caso, il numero*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

è detto "derivata di f in x_0 secondo la direzione v". In particolare, indicata con $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si dice che "f ha derivata parziale (prima) i-esima in x_0" se f è derivabile in x_0 secondo la direzione e_i e in tal caso si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) \qquad (\textit{notazione alternativa: } D_i f(x_0))$$

e tale numero è detto "derivata parziale (prima) i-esima di f in x_0". Se f ha tutte le derivate parziali in x_0, allora il vettore

$$\nabla f(x_0) := (D_1 f(x_0), \dots, D_n f(x_0))$$

è detto "gradiente di f in x_0".

ESEMPIO 1.1. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 = x_1^2 \text{ e } x_1 \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è derivabile secondo ogni direzione in 0, ma non è continua in 0.

ESEMPIO 1.2. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 / |x|^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha tutte le derivate parziali prime in $\mathbb{R}^2$ ma non è continua in 0.

[* Sesta settimana (23/03/2015); 36 *]

Proposizione 1.1 (**). *Siano* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}^n$*) una funzione e* $x_0 \in \operatorname{int} E$. *Supponiamo che esista* $u \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$f(x) - [f(x_0) + u \cdot (x - x_0)] = o(|x - x_0|), \text{ per } x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + u \cdot (x - x_0)]}{|x - x_0|} = 0.$$

Allora:

(1) f *è continua in* x_0*;*

(2) *Per ogni* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, la funzione* f *è derivabile in* x_0 *secondo la direzione* v *e si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = u \cdot v.$$

In particolare f *ha tutte le derivate parziali in* x_0 *e si ha* $\nabla f(x_0) = u$*. Quindi*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v, \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Definizione 1.2. *Siano dati una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}^n$*) e* $x_0 \in \operatorname{int} E$ *soddisfacenti all'ipotesi di Proposizione 1.1. Si dice allora che "*f *è differenziabile in* x_0*". L'operatore lineare* $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *rappresentato dalla matrice* $[df(x_0)] = \nabla f(x_0)^t$*, cioè*

$$df(x_0)v := \nabla f(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

è detto "differenziale di f *in* x_0*".*

Proposizione 1.2 (*). *Una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}$*) è differenziabile in* $x_0 \in \operatorname{int} E$ *se e solo se* f *è derivabile in* x_0*. In tal caso si ha* $[df(x_0)] = f'(x_0)$*.*

Osservazione 1.1. Per $i = 1, \dots, n$, consideriamo la funzione

$$x \mapsto x_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Allora si vede subito che tale funzione è differenziabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e quindi, per Proposizione 1.1, si ha (indicando con x_i anche tale funzione):

$$dx_i(x_0)v = v_i, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Di conseguenza, se $f : E \to \mathbb{R}$ (con $E \subset \mathbb{R}^n$) è una funzione differenziabile in $x_0 \in \operatorname{int} E$, si trova che

$$df(x_0)v = D_1 f(x_0) v_1 + \cdots D_n f(x_0) v_n = D_1 f(x_0) dx_1(x_0) v + \cdots D_n f(x_0) dx_n(x_0) v$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, ossia

$$df(x_0) = D_1 f(x_0) dx_1(x_0) + \cdots D_n f(x_0) dx_n(x_0).$$

Definizione 1.3. *Sia* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}^n$*) una funzione differenziabile in* $x_0 \in \operatorname{int} E$*. Allora il piano di equazione*

$$x_{n+1} = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

è detto "piano tangente al grafico di f *nel punto* $(x_0; f(x_0))$*".*

Osservazione 1.2. Le funzioni considerate in Esempio 1.1 e in Esempio 1.2 non sono differenziabili in 0.

Proposizione 1.3 (**). *Siano* $f, g : E \to \mathbb{R}$*, con* $E \subset \mathbb{R}^n$*, due funzioni differenziabili in* $x_0 \in \operatorname{int} E$*. Allora:*

(1) $f + g$ *è differenziabile in* x_0 *e si ha*
$$\nabla(f+g)(x_0) = \nabla f(x_0) + \nabla g(x_0)$$
i.e. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$*;*

(2) fg *è differenziabile in* x_0 *e si ha*
$$\nabla(fg)(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$
i.e. $d(fg)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0)$*.*

Il seguente teorema "del differenziale totale" fornisce una condizione sufficiente per la differenziabilità di una funzione in un punto.

Proposizione 1.4 (**). *Consideriamo una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}^n$*) e* $x_0 \in \operatorname{int} E$*. Supponiamo che* f *abbia tutte le derivate parziali in un intorno di* x_0 *e che queste siano continue in* x_0*. Allora* f *è differenziabile in* x_0*.*

Osservazione 1.3. La definizione delle derivate parziali seconde, terze, eccetera... di una funzione segue naturalmente quella delle derivate parziali prime. Per esempio se esiste la derivata i-esima di $f : E \to \mathbb{R}$ in un intorno di $x_0 \in \operatorname{int} E$ e se esiste la derivata parziale j-esima di $D_i f$ in x_0, allora si pone

$$D_{ji}F(x_0) := D_j(D_iF)(x_0).$$

Il seguente esempio mostra che l'esistenza di $D_{ji}f(x_0)$ non comporta l'esistenza di $D_{ij}f(x_0)$.

Esempio 1.3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x_1, x_2) := |x_1|.$$

Allora $D_{12}f$ esiste ed è nulla in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, mentre $D_{21}f$ non esiste in nessun punto dell'asse $x_1 = 0$.

Il seguente risultato è noto come Teorema di Schwarz.

Proposizione 1.5 (**). *Consideriamo una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *(con* $E \subset \mathbb{R}^n$*) e* $x_0 \in \operatorname{int} E$*. Se* $D_{ij}f$ *e* $D_{ji}f$ *(con* $i \neq j$*) esistono in un intorno di* x_0 *e sono continue in* x_0*, allora* $D_{ij}f(x_0) = D_{ji}f(x_0)$*.*

Definizione 1.4. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e k un intero positivo. Allora una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è detta "di classe C^k in Ω" se tutte le sue derivate di ordine minore o uguale a k sono funzioni continue in Ω. La famiglia di tali funzioni è indicata con $C^k(\Omega)$.*

Si hanno i seguenti corollari banali, rispettivamente, del teorema del differenziale totale e del teorema di Schwarz.

Proposizione 1.6 (°). *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(\Omega)$. Allora f è differenziabile in ogni punto di Ω.*

Proposizione 1.7 (°). *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni funzione $f \in C^2(\Omega)$ vale l'identità delle derivate incrociate $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $i, j = 1, 2, \dots , n$.*

1.1. Digressione su regolarità di integrali dipendenti da un parametro.

Proposizione 1.8 (*). *Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$g(x_2) := \int_a^b f(x_1, x_2)\, dx_1, \quad x_2 \in [c, d]$$

è uniformemente continua.

Proposizione 1.9 (*). *Sia $f : [a, b]\times[c, d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $D_2f(x_1, x_2)$ esiste ed è continua in ogni $(x_1, x_2) \in [a, b] \times [c, d]$. Allora $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$g(x_2) := \int_a^b f(x_1, x_2)\, dx_1, \quad x_2 \in [c, d]$$

è derivabile in $[c, d]$ e vale

$$g'(x_2) = \int_a^b D_2f(x_1, x_2)\, dx_1, \quad x_2 \in [c, d].$$

In particolare (per Proposizione 1.8) si ha $g \in C^1([c, d])$.

*** Esercizi suggeriti:** [**1**, Sez. 7.2, 7.3], [**2**, Es. 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6], [**5**, Sez. 4.2].

2. Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabili

Proposizione 2.1. *(**) Siano dati una funzione*

$$f = (f_1, \dots , f_m) : E \to \mathbb{R}^m, \text{ con } E \subset \mathbb{R}^n$$

e $x_0 \in \operatorname{int} E$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(1) *Esiste un operatore lineare* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tale che*

$$f(x) - [f(x_0) + L(x - x_0)] = o(|x - x_0|), \ \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + L(x - x_0)]}{|x - x_0|} = 0.$$

(2) *Per ogni* $i = 1, \dots, m$*, la funzione* f_i *è differenziabile in* x_0*.*

Se tali proprietà hanno luogo, vale

$$[L] = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \big(D_1 f(x_0) \cdots D_n f(x_0)\big).$$

[* Settima settimana (30/03/2015); 42 *]

Definizione 2.1. *Una funzione* $f : E \to \mathbb{R}^m$*, con* $E \subset \mathbb{R}^n$*, è detta "differenziabile in* $x_0 \in \operatorname{int} E$*" se verifica una delle due proprietà (equivalenti) elencate in Proposizione 2.1. In tal caso l'operatore lineare* L *è detto "differenziale di* f *in* x_0*" ed è indicato con* $df(x_0)$*. La corrispondente matrice* $[L]$ *è detta "matrice Jacobiana di* f *in* x_0*" e si indica con* $Df(x_0)$*.*

Osservazione 2.1. Se $f : E \to \mathbb{R}^m$ (con $E \subset \mathbb{R}^n$) è differenziabile in $x_0 \in \operatorname{int} E$, allora f è continua in x_0.

Esempio 2.1. Sia $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ tale che tutte le funzioni γ_i ($i = 1, \dots, m$) siano derivabili in $t_0 \in (a, b)$. Allora per Proposizione 1.2 e Proposizione 2.1 si ha che γ è differenziabile in t_0 e vale $[d\gamma(t_0)] = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_m'(t_0))^t$.

Proposizione 2.2 (**). *Siano date due funzioni*

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

tali che $f(E) \subset F$*. Supponiamo inoltre che* f *sia differenziabile in* $x_0 \in \operatorname{int} E$*, che* $f(x_0) \in \operatorname{int} F$ *e che* g *sia differenziabile in* $f(x_0)$*. Allora* $g \circ f$ *è differenziabile in* x_0 *e vale l'identità*

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

e quindi anche

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \times Df(x_0).$$

Proposizione 2.3 (*). *Siano date due funzioni*

$$\gamma : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

tali che $\gamma(E) \subset F$. *Supponiamo che* γ *sia differenziabile (o equivalentemente che tutte le sue componenti* γ_i *siano derivabili) in* $x_0 \in \operatorname{int} E$, *che* $\gamma(x_0) \in \operatorname{int} F$ *e che* g *sia differenziabile in* $\gamma(x_0)$. *Allora* $g \circ \gamma$ *è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$(g \circ \gamma)'(x_0) = \nabla g(\gamma(x_0)) \cdot \gamma'(x_0)$$

dove $\gamma'(x_0) := [d\gamma(x_0)] = (\gamma_1'(x_0), \ldots, \gamma_m'(x_0))^t$.

Come corollario di Proposizione 2.3 si ottiene il seguente risultato che generalizza il teorema del valor medio di Lagrange.

Proposizione 2.4 (**). *Siano dati una funzione* $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *e* $P, Q \in F$. *Poniamo*

$$(P; Q) := \{P + t(Q - P) \,|\, t \in (0, 1)\}$$

e supponiamo che

(i) $(P; Q) \subset \operatorname{int} F$;

(ii) g *è differenziabile nei punti di* $(P; Q)$ *e inoltre è continua in* P *e in* Q.

Allora esiste $R \in (P; Q)$ *tale che*

$$g(Q) - g(P) = \nabla g(R) \cdot (Q - P).$$

Osservazione 2.2. Per funzioni a valori vettoriali, in generale, non vale il teorema del valor medio. Un esempio è dato da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Infatti $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$, mentre $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$.

Proposizione 2.5 (*). *Siano dati un sottoinsieme aperto e connesso* Ω *di* $\mathbb{R}^m$ *e una funzione* $g : \Omega \to \mathbb{R}$. *Si ha che* g *è costante se e solo se per ogni* $x \in \Omega$ *esiste* $\nabla g(x)$ *e vale* $\nabla g(x) = 0$.

*** Esercizi suggeriti:** [**1**, Sez. 7.2], [**2**, Es. 11.14, 11.15, 11.16, 11.17, 11.19].

3. Formula di Taylor e applicazione allo studio locale di un grafico

Ci servirà il seguente risultato sulle forme quadratiche associate a un operatore lineare simmetrico. Esso discende facilmente dal teorema spettrale, e.g. [**6**, Teorema 22.2].

Proposizione 3.1 (*). *Sia dato un operatore lineare simmetrico* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Allora esiste una base ortonormale* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *tale che:*

(1) *Ogni* u_i *è autovettore di* L *e se* λ_i *indica l'autovalore corrispondente si ha* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$;

(2) *Se λ è un autovalore di L allora $\lambda = \lambda_i$ per qualche i;*

(3) *Se Q indica la forma quadratica associata a L, cioè*

$$Q(x) := (Lx) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

allora si ha

$$\lambda_1 = Q(u_1) = \min_{\mathbb{S}^{n-1}} Q, \quad \lambda_n = Q(u_n) = \max_{\mathbb{S}^{n-1}} Q.$$

Definizione 3.1. *Sia dato un operatore lineare simmetrico $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si dice che L è "definito positivo (risp. negativo)" se tutti i suoi autovalori sono positivi (risp. negativi). Si dice che L è "semidefinito positivo (risp. negativo)" se tutti i suoi autovalori sono positivi o nulli (risp. negativi o nulli). Si dice che L è "indefinito" se esso ha autovalori positivi e autovalori negativi.*

Proposizione 3.2 (**). *Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(E)$ e $x_0 \in E$. Allora, per ogni $x \in E$ tale che $(x_0; x) \subset E$ esiste $\xi(x_0, x) \in (x_0; x)$ per cui vale l'identità*

$$f(x) - [f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)] = \frac{1}{2}[H_f(\xi(x_0, x))(x - x_0)] \cdot (x - x_0)$$

dove H_f indica il campo di matrici Hessiano

$$H_f(y) := \begin{pmatrix} D_{11}f(y) & \cdots & D_{1n}f(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(y) & \cdots & D_{nn}f(y) \end{pmatrix}, \qquad y \in E.$$

In particolare, si ha

$$f(x) - [f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)] = \frac{1}{2}[H_f(x_0)(x - x_0)] \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

[* Ottava settimana (06/04/2015); 44 *]

Da Proposizione 3.2 si ottiene il seguente banale corollario.

Proposizione 3.3 (°). *Siano dati un sottoinsieme aperto E di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^2(E)$. Supponiamo che $H_f(x)$ sia semidefinita positiva per ogni $x \in E$. Allora f è localmente convessa, i.e. per ogni $x_0 \in E$ esiste $r > 0$ tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ se } x \in B(x_0, r).$$

Proposizione 3.4 (*). *Si consideri una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \operatorname{int} E$ un punto in cui f è differenziabile e ha un estremo locale. Allora x_0 è un punto stazionario di f, cioè si ha $\nabla f(x_0) = 0$.*

Proposizione 3.5 (*). *Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(E)$ e sia $x_0 \in E$ un punto stazionario di f. Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se* $H_f(x_0)$ *è definita positiva, allora* x_0 *è punto di minimo locale;*

(2) *Se* $H_f(x_0)$ *è definita negativa, allora* x_0 *è punto di massimo locale;*

(3) *Se* $H_f(x_0)$ *è indefinita, allora* x_0 *è punto di sella;*

Osservazione 3.1. Nel corso della dimostrazione di Proposizione 3.5 abbiamo provato, in particolare, che se u è un autovettore di $H_f(x_0)$ e se il corrispondente autovalore è positivo (risp. negativo) allora la funzione

$$t \mapsto f(x_0 + tu), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

ha minimo (risp. massimo) locale in 0.

Vale anche la seguente proposizione.

Proposizione 3.6 (*). *Sia* E *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(E)$ *e sia* $x_0 \in E$ *un punto stazionario di* f. *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se* x_0 *è punto di minimo locale, allora* $H_f(x_0)$ *è semidefinita positiva;*

(2) *Se* x_0 *è punto di massimo locale, allora* $H_f(x_0)$ *è semidefinita negativa.*

*** Esercizi suggeriti:** [**1**, Sez. 7.4], [**2**, Es. 11.13, 11.18], [**2**, Es. 13.10, 13.11], [**5**, Sez. 4.3], [**5**, Sez. 6.8; Es. 97-104]; Foglio di "Esercizi sulla formula di Taylor" disponibile sulle pagine web del corso.

[* Nona settimana (13/04/2015); 50 *]

4. Il teorema della funzione implicita e il teorema della funzione inversa. Moltiplicatori di Lagrange

Proposizione 4.1 (**). *Siano* E *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in E$ *e* $F \in C^1(E)$ *tali che*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad D_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono $\rho > 0$ *e* $f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *tali che:*

(1) *Si ha* $f(x_0) = y_0$;

(2) *Per ogni* $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *si ha* $(x, f(x)) \in E$ *e vale* $F(x, f(x)) = 0$;

(3) *Per ogni* $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *si ha* $D_y f(x, f(x)) \neq 0$ *e vale l'identità*

$$f'(x) = -\frac{D_x F(x, f(x))}{D_y F(x, f(x))}.$$

Osservazione 4.1. Se in Proposizione 4.1 si richiede $F \in C^k(E)$, con $k \geq 1$, si ottiene ovviamente che f è di classe C^k.

Osservazione 4.2. Proposizione 4.1 afferma che un insieme di livello di F è grafico di una funzione di classe C^1 vicino a ogni suo punto in cui il gradiente non si annulla. Inoltre in tale punto ∇F è ortogonale alla retta tangente.

Vale il seguente teorema che generalizza Proposizione 4.1. Per la sua dimostrazione si rimanda (per esempio) a [**4**, Cap. 7, Teorema 6.1].

Proposizione 4.2. *Siano* E *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$, $(x_0, y_0) \in E$ *e* $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ *tali che*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \det D_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono $\rho > 0$ *e una funzione* $f : B(x_0, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - x_0| < \rho\} \to \mathbb{R}^m$ *di classe* C^1 *tali che:*

(1) *Vale* $f(x_0) = y_0$;

(2) *Per ogni* $x \in B(x_0, \rho)$ *si ha* $(x, f(x)) \in E$ *e vale* $F(x, f(x)) = 0$;

(3) *Per ogni* $x \in B(x_0, \rho)$ *si ha* $\det D_y F(x, f(x)) \neq 0$ *e vale l'identità*

$$Df(x) = -[D_y F(x, f(x))]^{-1} D_x F(x, f(x)).$$

Osservazione 4.3. Se in Proposizione 4.2 si richiede $F \in C^k(E, \mathbb{R}^m)$, con $k \geq 1$, si ottiene ovviamente che f è di classe C^k.

Come corollario di Proposizione 4.2, si ottiene il seguente teorema di invertibilità locale.

Proposizione 4.3 (*). *Siano* Ω *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ *e* $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *tali che*

$$\det Dg(x_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno V *di* $g(x_0)$ *e una funzione* $f \in C^1(V, \Omega)$ *tale che* $f(g(x_0)) = x_0$ *e* $g(f(y)) = y$ *per ogni* $y \in V$.

Osservazione 4.4. Se $g : \Omega \to g(\Omega)$ è invertibile allora essa è anche localmente invertibile. Il seguente esempio dimostra che il viceversa è falso. Siano $\Omega := (0, 4\pi) \times (1, 2) \subset \mathbb{R}^2$ e

$$g(x_1, x_2) := (x_2 \cos x_1, x_2 \sin x_1), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Allora $g(\Omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ e come si vede subito g non è iniettiva (quindi non è invertibile). Tuttavia g è localmente invertibile in ogni punto di Ω. Infatti, per ogni $(x_1, x_2) \in \Omega$ si ha

$$Dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det Dg(x_1, x_2) = -x_2 \neq 0$.

[* Decima settimana (20/04/2015); 56 *]

Definizione 4.1. *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$, $(x_0, y_0) \in E$ e $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$. Allora:*

(1) *Si dice che "(x_0, y_0) è un punto regolare di $F^{-1}(0)$" se vale*
$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \det D_y F(x_0, y_0) \neq 0;$$
(2) *Una "curva vincolata a F per (x_0, y_0)" è una funzione $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y)$ tale che I è un intervallo aperto contenente 0 e*
$$\gamma(I) \subset F^{-1}(0), \quad \gamma(0) = (x_0, y_0).$$
La famiglia di tali curve è indicata con $\Gamma_{F,(x_0,y_0)}$;
(3) *L'insieme*
$$T_{F,(x_0,y_0)} := \{\gamma'(0) \,|\, \gamma \in \Gamma_{F,(x_0,y_0)}\}$$
è detto "spazio tangente a $F^{-1}(0)$ in (x_0, y_0)".

Proposizione 4.4 (**). *Siano E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ e (x_0, y_0) un punto regolare di $F^{-1}(0)$. Allora, se f indica la funzione implicita descritta in Proposizione 4.2, si ha:*
$$T_{F,(x_0,y_0)} = \ker DF(x_0, y_0) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^n} \\ Df(x_0) \end{pmatrix}.$$
In particolare $T_{F,(x_0,y_0)}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ di dimensione n. Inoltre l'equazione dello spazio affine tangente a $F^{-1}(0)$ nel punto (x_0, y_0) è
$$D_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y F(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Il seguente teorema formalizza il cosiddetto "metodo dei moltiplicatori di Lagrange".

Proposizione 4.5 (**). *Siano dati un sottoinsieme aperto E di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ e un punto regolare (x_0, y_0) di $F^{-1}(0)$. Inoltre si abbia $\varphi \in C^1(E)$ tale che (x_0, y_0) sia un punto di estremo locale di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$, i.e. esista un intorno U di (x_0, y_0) per cui vale $\varphi(U \cap F^{-1}(0)) \leq \varphi(x_0, y_0)$ oppure $\varphi(U \cap F^{-1}(0)) \geq \varphi(x_0, y_0)$.*

Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (detti "moltiplicatori di Lagrange") tali che
$$\nabla\varphi(x_0, y_0) = \lambda_1 \nabla F_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_m \nabla F_m(x_0, y_0).$$

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.7], [**2**, Es. 13.8, 13.9, 13.12, 13.13], [**5**, Sez. 6.8; Es. 92-95, 105-110, 111-134]

CHAPTER 4

Altre applicazioni del calcolo differenziale

[* Undicesima settimana (27/04/2015); 62 *]

1. Potenziale di un campo vettoriale

Cominciamo col dare una serie di definizioni che consentiranno, subito dopo, di enunciare rapidamente i teoremi di questa sezione.

DEFINIZIONE 1.1. *Sia E sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo un campo di vettori $F : E \to \mathbb{R}^n$. Allora chiameremo "potenziale di F (in E)" ogni funzione $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, φ sia differenziabile in x e valga $\nabla\varphi(x) = F(x)$.*

OSSERVAZIONE 1.1. Da un potenziale di F se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con φ il potenziale dato e con E_j $(j = 1, \dots)$ le componenti connesse di E, allora ogni funzione così definita

$$\psi(x) := \varphi(x) + c_j, \qquad \text{se } x \in E_j \tag{1.1}$$

$(c_j \in \mathbb{R})$ è un potenziale di F. Anzi, ricordando Proposizione 2.5, si dimostra facilmente il viceversa e cioè che ogni potenziale di F è della forma (1.1).

DEFINIZIONE 1.2. *Sia E sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che per ogni $i = 1, \dots, N$ esistano un intervallo $[a_i, b_i]$ e una funzione $\gamma_i \in C^1([a_i, b_i], E)$ tali che*

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) \qquad (i = 1, \dots, N-1).$$

Si dice allora che la famiglia $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^N$ è una "$(1, n)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua (in E)". I punti $A_\Gamma := \gamma_1(a_1)$ e $B_\Gamma := \gamma_N(b_N)$ sono detti, rispettivamente, "punto iniziale di Γ" e "punto finale di Γ". Infine, si dice che "Γ è chiusa" se $A_\Gamma = B_\Gamma$.

DEFINIZIONE 1.3. *Sia E sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Inoltre sia $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$ e sia $\Gamma = \{\gamma_i : [a_i, b_i] \to E\}_{i=1}^N$ una $(1, n)$-parametrizzazione C^1 a tratti e continua in E. Si definisce allora l'"integrale di F su Γ" come il numero*

$$\int_\Gamma F := \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} F(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\, dt.$$

DEFINIZIONE 1.4. *Sia E sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Si dice che:*

(i) *Un campo* $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ *soddisfa la "condizione delle derivate incrociate (CDI)" se vale l'uguaglianza*

$$D_i F_j(x) = D_j F_i(x)$$

per ogni $x \in E$ *e per ogni* $i, j = 1, \dots, n$;

(ii) *Un campo* $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$ *è "conservativo" se*

$$\int_\Gamma F = 0$$

per ogni $(1, n)$*-parametrizzazione* C^1 *a tratti continua e chiusa* Γ *in* E;

(iii) *Un campo* $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$ *soddisfa la "condizione dell'indipendenza dal percorso (CIP)" se per ogni coppia* Γ, Λ *di* $(1, n)$*-parametrizzazioni* C^1 *a tratti continue in* E *tali che* $A_\Gamma = A_\Lambda$ *e* $B_\Gamma = B_\Lambda$ *si ha*

$$\int_\Gamma F = \int_\Lambda F.$$

Vale il seguente risultato

PROPOSIZIONE 1.1 (*). *Sia* E *sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$. *Si consideri un campo* $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$ *e si supponga che esista un potenziale* φ *di* F. *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se* Γ *è una qualsiasi* $(1, n)$*-parametrizzazione* C^1 *a tratti continua in* E, *allora si ha*

$$\int_\Gamma F = \varphi(B_\Gamma) - \varphi(A_\Gamma).$$

In particolare F *soddisfa la CIP ed è conservativo;*

(2) *Se* F *è di classe* C^1 *allora esso soddisfa la CDI.*

OSSERVAZIONE 1.2. L' esistenza di un potenziale è una condizione molto restrittiva per il campo, come si intuisce anche dal fatto appena provato che il campo (se è di classe C^1) deve soddisfare la CDI. Per questo motivo è facilissimo produrre esempi di campi non conservativi, e.g. il campo $F(x, y) := (0, x)$ in $\mathbb{R}^2$.

OSSERVAZIONE 1.3. Il fatto che $F : E \to \mathbb{R}^n$ sia di classe C^1 e soddisfi la CDI non è sufficiente, in generale, a garantire l'esistenza di un potenziale. Lo capiremo subito attraverso un esempio che riusciremo presto ad interpretare come "rivelatore particolare" di un fenomeno generale. Sia F il campo così definito

$$E := \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0), \qquad F(x, y) := \frac{R(x, y)}{\|(x, y)\|^2} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

che soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. Mostreremo ora come supporre l'esistenza di un potenziale di F conduca ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo la $(1, 2)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua e chiusa $\Gamma = \{\gamma_1\}$ con

$$\gamma_1(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

troviamo subito

$$\int_\Gamma F = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi. \tag{1.2}$$

D'altra parte, se esistesse un potenziale φ di F, allora F dovrebbe essere conservativo e quindi si avrebbe

$$\int_\Gamma F = 0$$

per (2) in Proposizione 1.1. Da questa contraddizione segue che F non ha potenziale.

Proviamo il seguente semplice fatto.

PROPOSIZIONE 1.2 (*). *Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$. Allora F è conservativo se e solo se F soddisfa la CIP.*

La seguente proposizione ci servirà per provare il risultato successivo e cioè che ogni campo conservativo ha potenziale.

PROPOSIZIONE 1.3 (**). *Sia E un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Allora considerata una qualsiasi coppia di punti $P, Q \in E$ esiste una $(1,n)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua Γ in E tale che $A_\Gamma = P$ e $B_\Gamma = Q$.*

PROPOSIZIONE 1.4 (**). *Sia E un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia dato un campo conservativo $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$. Allora F ha un potenziale. Più precisamente siano E_j $(j = 1, \dots)$ le componenti connesse di E, si consideri $P_j \in E_j$ e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_\Gamma F \qquad (\textit{se } P \in E_j)$$

dove Γ è una qualsiasi $(1,n)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua in E_j tale che $A_\Gamma = P_j$ e $B_\Gamma = P$. Allora φ è un potenziale di F (quello che si annulla nei P_j).

<u>Nota bene:</u> una siffatta Γ esiste, quale che sia P, grazie a Proposizione 1.3. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di Γ, per Proposizione 1.2. La funzione φ risulta pertanto ben definita.

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali un campo soddisfacente CDI è conservativo.

DEFINIZIONE 1.5. *L'insieme E si dice "stellato" se esiste $x_0 \in E$, detto "centro di E", tale che il segmento $[x_0; x]$ è contenuto in E per ogni $x \in E$.*

OSSERVAZIONE 1.4. Valgono i seguenti fatti.

- Se E è un aperto stellato allora E è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi aperti

  $$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \qquad \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$$

  sono connessi e non stellati;

- Se E è convesso, allora E è stellato;
- Si prova, e si intuisce facilmente, che se E è stellato allora E è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. E.g. l'aperto connesso e non stellato $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso.

Proposizione 1.5. *Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che ogni componente connessa E_j di E sia un insieme stellato. Inoltre sia dato $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ soddisfacente la CDI. Allora F ha potenziale. Più precisamente, se P_j indica un centro di E_j, il potenziale che si annulla nei P_j è dato da*

$$\varphi(P) := \int_{[P_j;P]} F \qquad \textit{(se } P \in E_j\textit{)}$$

dove "$[P_j; P]$" è una notazione breve per indicare la $(1,n)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua in E_j corrispondente al segmento $[P_j; P]$ e cioè $\{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n\}$ con $\gamma(t) := P_j + t(P - P_j)$.

Osservazione 1.5. La Proposizione 1.5 può essere estesa al caso in cui le componenti connesse di E sono semplicemente connesse.

Osservazione 1.6. Tutta la trattazione di questa sezione si può replicare utilizzando percorsi regolari.

* **Esercizi suggeriti:** Foglio di "Esercizi su potenziale di un campo vettoriale" disponibile sulle pagine web del corso.

[* Dodicesima settimana (04/05/2015); 68 *]

2. Equazioni differenziali ordinarie

2.1. Introduzione.

Considerazioni (parziali) intorno ai seguenti temi:

- Equazione differenziale ordinaria (EDO) di ordine n in forma generica
$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$
e corrispondente problema di Cauchy. Eccessiva genericità di tale formulazione.
- EDO di ordine n in forma normale

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \tag{2.1}$$

e corrispondente problema di Cauchy. Sistema differenziale del primo ordine associato a (2.1):

$$z'(x) = F(x, z(x)) := (z_2(x), \dots, z_n(x), f(x, z(x)))^t \tag{2.2}$$

with $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$. Equivalenza di (2.1) e (2.2):

(i) Se $y(x)$ verifica (2.1), allora $z(x) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))^t$ verifica (2.2);

(ii) Se $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$ verifica (2.2) allora $y(x) := z_1(x)$ verifica (2.1).

- EDO lineare di ordine n

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \tag{2.3}$$

e sistema differenziale associato. La EDO (2.3) si dice omogenea se $b = 0$. La EDO lineare omogenea associata a (2.3) è la EDO lineare

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{2.4}$$

- L'insieme delle soluzioni di una EDO lineare omogenea è uno spazio vettoriale.
- Sia σ una qualsiasi soluzione della EDO lineare (2.3) e sia V lo spazio vettoriale delle soluzioni della EDO lineare omogenea associata (2.4). Allora $V + \sigma$ coincide con l'insieme di tutte le soluzioni di (2.3).
- Soluzione generale di una EDO lineare del primo ordine, metodo del fattore integrante.
- Soluzione generale di una EDO del primo ordine a variabili separate.
- Esempi di problemi di Cauchy (e relative risoluzioni) tratti dalla fisica e dall'economia.

2.2. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale. Il seguente teorema di punto fisso sarà essenziale per provare il successimo teorema di esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy.

PROPOSIZIONE 2.1 (**). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $T : X \to X$ una contrazione, cioè esista $q < 1$ tale che*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

per ogni $x_1, x_2 \in X$. Allora esiste uno e un solo $\overline{x} \in X$ tale che $T\overline{x} = \overline{x}$. In particolare, se c'è un sottoinsieme chiuso K di X tale che $T(K) \subset K$ allora $\overline{x} \in K$.

[* Tredicesima settimana (11/05/2015); 74 *]

Proposizione 2.2 (**). *Consideriamo un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$, $F \in C(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo inoltre che F sia localmente y-Lipschitziana in (x_0, y_0), cioè che esistano $r_1 > 0$ e $L > 0$ tali che:*

(i) $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [y_0 - r_1, y_0 + r_1] \subset A$;

(ii) $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *per ogni* $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ *e per ogni* $y_1, y_2 \in [y_0 - r_1, y_0 + r_1]$.

Allora, posto

$$M := \max_Q |F|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min\left\{\frac{r_1}{1+M}, \frac{1}{L}\right\},$$

esiste una e una sola $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [y_0 - r_1, y_0 + r_1])$ *tale che* $u(x_0) = y_0$ *e*

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

per ogni $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$.

Lo stesso argomento che ha consentito di provare Proposizione 2.2, permette di provare facilmente il seguente risultato per i sistemi differenziali.

Proposizione 2.3 (°). *Consideriamo un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z$, $F \in C(A, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}_x$ e $z_0 \in \mathbb{R}^n_z$ tali che $(x_0, z_0) \in A$. Supponiamo inoltre che F sia localmente z-Lipschitziana in (x_0, z_0), cioè che esistano $r_1 > 0$ e $L > 0$ tali che:*

(i) $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times (z_0 + [-r_1, r_1]^n) \subset A$;

(ii) $|F(x, z_1) - F(x, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$ *per ogni* $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ *e per ogni* $z_1, z_2 \in z_0 + [-r_1, r_1]^n$.

Allora, posto

$$M := \max_Q |F|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min\left\{\frac{r_1}{1+M}, \frac{1}{L}\right\},$$

esiste una e una sola $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], z_0 + [-r_1, r_1]^n)$ *tale che* $u(x_0) = z_0$ *e*

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

per ogni $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$.

Osservazione 2.1. Osserviamo che se A è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z$ e se $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, allora F è localmente z-Lipschitziana in ogni punto di A (per il teorema del valor medio di Lagrange). Ne segue un risultato di esistenza e unicità locale, per il problema di Cauchy, sotto la sola ipotesi che $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$.

Osservazione 2.2. Al venir meno dell'ipotesi di Lipschitzianità locale, può venir meno anche l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Per esempio, se consideriamo il caso

$$A := \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := \frac{3}{2}\, y^{1/3}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

si vede subito che per ogni $a \geq 0$ la funzione

$$u_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a, \\ (x-a)^{3/2} & \text{se } x > a \end{cases}$$

è soluzione del problema di Cauchy (la famiglia delle u_a è nota come "il baffo di Peano").

Il seguente risultato precede un teorema di esistenza di soluzioni massimali per il problema di Cauchy.

Proposizione 2.4 (*). *Siano dati un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$, $F \in C(A)$ e supponiamo che F sia localmente y-Lipschitziana in ogni punto di A. Se $(x_0, y_0) \in A$, consideriamo due soluzioni*

$$u : I_u = (a_u, b_u) \to \mathbb{R}, \qquad v : I_v = (a_v, b_v) \to \mathbb{R}$$

del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

tali che $I_u \subset I_v$. Allora v è un prolungamento di u, cioè si ha $v|_{I_u} = u$.

Proposizione 2.5 (**). *Siano dati un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$, $F \in C(A)$ e supponiamo che F sia localmente y-Lipschitziana in ogni punto di A. Se $(x_0, y_0) \in A$, consideriamo una soluzione*

$$u : I_u = (a_u, b_u) \to \mathbb{R}$$

del problema di Cauchy (2.5)*. Allora esiste una e una sola soluzione massimale di* (2.5) *che prolunga u, cioè una soluzione $\overline{u} : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che:*

(1) *$I_u \subset (a, b)$ e vale $\overline{u}|_{I_u} = u$;*
(2) *Se $\tilde{v} : I_{\tilde{v}} \to \mathbb{R}$ è una soluzione di* (2.5) *che prolunga $\overline{u}$, cioè se $I_{\tilde{v}} \supset (a, b)$ e $\tilde{v}|_{(a,b)} = \overline{u}$, allora si ha $\tilde{v} = \overline{u}$.*

Proviamo ora un lemma tecnico. Esso ci servirà a dimostrare che il grafico di una soluzione massimale del problema di Cauchy (2.5) non può rimanere confinato dentro un qualsivoglia sottoinsieme compatto di A

Proposizione 2.6 (**). *Siano dati un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$, $F \in C(A)$ e $u \in C^1((a, b))$ tale che*

$$(x, u(x)) \in A, \qquad u'(x) = F(x, u(x))$$

per ogni $x \in (a, b)$*. Supponiamo inoltre che esista una successione* $\{x_h\}$ *contenuta in* (a, b) *tale che*

$$\lim_{h\to\infty} x_h = b, \quad \lim_{h\to\infty} u(x_h) = u_0$$

e che sia $(b, u_0) \in A$*. Allora si ha anche*

$$\lim_{x\to b^-} u(x) = u_0.$$

PROPOSIZIONE 2.7 (**). *Siano dati un sottoinsieme aperto* A *di* $\mathbb{R}^2$*,* $F \in C(A)$ *e supponiamo che* F *sia localmente* y*-Lipschitziana in ogni punto di* A*. Se* $(x_0, y_0) \in A$*, consideriamo la soluzione massimale*

$$\overline{u} : (a, b) \to \mathbb{R}$$

del problema di Cauchy (2.5)*, cioè supponiamo che essa soddisfi (2) di Proposizione 2.5. Allora per ogni sottoinsieme compatto* K *di* A *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $(t, \overline{u}(t)) \in A \setminus K$ *ogni volta che* $t \in (a, a + \varepsilon) \cup (b - \varepsilon, b)$*.*

[* Quattordicesima settimana (18/05/2015); 80 *]

Vale il seguente corollario di Proposizione 2.7.

PROPOSIZIONE 2.8 (**). *Sia* $A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ *e consideriamo* $F \in C(A)$ *tale che:*

(i) F *è localmente* y*-Lipschitziana in ogni punto di* A*;*
(ii) *Esiste una costante* C *per cui vale*

$$|F(x, y)| \leq C(1 + |y|)$$

per ogni $(x, y) \in A$*.*

Inoltre, se $(x_0, y_0) \in A$*, sia*

$$\overline{u} : (a, b) \to \mathbb{R}$$

la soluzione massimale del problema di Cauchy (2.5)*, cioè supponiamo che essa soddisfi (2) di Proposizione 2.5. Allora* $a = \alpha$ *e* $b = \beta$*.*

Come facile corollario di Proposizione 2.4 e Proposizione 2.8 otteniamo il seguente teorema.

PROPOSIZIONE 2.9 (*). *Sia* $A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ *e consideriamo* $F \in C(A)$ *tale che:*

(i) F *è localmente* y*-Lipschitziana in ogni punto di* A*;*

(ii) *Per ogni* $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ *tali che* $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ *esiste una costante* $C_{\alpha',\beta'}$ *per cui vale*
$$|F(x,y)| \leq C_{\alpha',\beta'}(1+|y|)$$
per ogni $(x,y) \in (\alpha', \beta') \times \mathbb{R}$.

Allora, se $(x_0, y_0) \in A$*, esiste una soluzione del problema di Cauchy* (2.5) *avente come dominio* (α, β)*. In particolare tale soluzione è quella massimale.*

Osservazione 2.3. Come abbiamo già visto nel caso del teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni per il problema di Cauchy, anche Proposizione 2.5, Proposizione 2.7, Proposizione 2.8 e Proposizione 2.9 (che riguardano l'equazione scalare) si generalizzano banalmente al caso del sistema differenziale.

*** Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5], [**5**, Sez. 3.1].

2.3. Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine qualsiasi. Dati
$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C((\alpha,\beta)), \qquad x_0 \in (\alpha,\beta), \qquad z_0 \in \mathbb{R}^n$$
consideriamo il seguente problema per EDO lineari di ordine n:
$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))^t = z_0. \end{cases} \tag{2.6}$$
Come abbiamo già osservato nel corso della lezione introduttiva sulle EDO, il problema (2.6) è equivalente al problema di Cauchy:
$$\begin{cases} z'(x) = M(x)z(x) + B(x) \\ z(x) = z_0 \end{cases} \tag{2.7}$$
con $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$, dove
$$M(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$
e
$$B(x) := (0, \dots, 0, b(x))^t.$$
Più precisamente valgono i seguenti fatti:

(1) Se $u \in C^n((\alpha,\beta))$ risolve (2.6), allora $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$ appartiene a $C^1((\alpha,\beta), \mathbb{R}^n)$ e risolve (2.7);

(2) Se $U \in C^1((\alpha,\beta), \mathbb{R}^n)$ risolve il problema di Cauchy (2.7), allora U_1 appartiene a $C^n((\alpha,\beta))$ e risolve (2.6).

Osserviamo che la funzione

$$F : A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definita da

$$F(x, z) := M(x)z + B(x)$$

gode delle seguenti proprietà:

(i) Essa è localmente z-Lipschitziana in ogni punto di A;

(ii) Se $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ sono tali che $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ e

$$C_{\alpha',\beta'} := \max_{x\in[\alpha',\beta']} \|M(x)\| + \max_{x\in[\alpha',\beta']} |B(x)|$$

allora

$$|F(x, z)| \leq C_{\alpha',\beta'}(1 + |z|)$$

per ogni $(x, z) \in (\alpha', \beta') \times \mathbb{R}^n$. Osserviamo che (data la forma esplicita della matrice M) si ha $\|M\|^2 = n - 1 + \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2$.

[* Quindicesima settimana (25/05/2015); 84 *]

Possiamo ora applicare Proposizione 2.9 e ottenere subito il seguente risultato relativo al problema (2.6).

PROPOSIZIONE 2.10 (°). *Se $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e $z_0 \in \mathbb{R}^n$, allora esiste una e una sola $u \in C^n((\alpha, \beta))$ che risolve problema (2.6).*

Vale il seguente teorema sulla struttura della famiglia delle soluzioni del problema (2.6).

PROPOSIZIONE 2.11 (*). *Sia Σ l'insieme delle soluzioni $u \in C^n((\alpha, \beta))$ della EDO*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b$$

e sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni $u \in C^n((\alpha, \beta))$ della EDO omogenea associata

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Allora:

(1) *Σ_0 è un sottospazio vettoriale n-dimensionale di $C^n((\alpha, \beta))$;*

(2) *Σ è non vuoto e presa una qualsiasi $v \in \Sigma$ si ha $\Sigma = \Sigma_0 + v$.*

Proposizione 2.12 (*). *Siano* $u_1, \dots, u_n \in \Sigma_0$ *e sia* W *il campo Wronskiano di matrici associato a* $\{u_1, \dots, u_n\}$*, i.e.*

$$W(x) := \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

Se esiste $x_1 \in (\alpha, \beta)$ *tale che* $\det W(x_1) \neq 0$*, allora* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *è una base di* Σ_0*.*

Proposizione 2.13 (**). *Sia* $x_1 \in (\alpha, \beta)$ *e sia* W *il campo Wronskiano di matrici associato a* $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \Sigma_0$*. Allora la funzione* $w := \det W \in C^1((\alpha, \beta))$ *soddisfa la seguente identità*

$$w(x) = w(x_1) e^{-\int_{x_1}^{x} a_{n-1}(t)dt}, \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

In particololare, si possono verificare soltanto le seguenti proprietà alternative:

(i) $w(x) \neq 0$*, per ogni* $x \in (\alpha, \beta)$*;*
(ii) $w(x) = 0$*, per ogni* $x \in (\alpha, \beta)$*.*

Esempio 2.1. Consideriamo la EDO omogenea di ordine due a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = 0$$

e osserviamo che $e^{\lambda x}$ la verifica se

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{2.8}$$

Servendosi di Proposizione 2.12 è facile provare che una base dello spazio vettoriale Σ_0 è data da:

- $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$, se (2.8) ha due soluzioni reali distinte λ_1 e λ_2;
- $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$, se (2.8) ha un'unica soluzione reale λ;
- $\{e^{hx} \cos kx, e^{hx} \sin kx\}$, se (2.8) non ha radici reali e se $h \pm ik$ sono le radici complesse coniugate.

* **Esercizi suggeriti:** [**2**, Es. 17.6, 17.7], [**4**, Sez. 17.6], [**5**, Es. 68-77, Sez. 3.2].

Bibliography

[1] M. Amar, A.M. Bersani: Esercizi di analisi matematica (seconda edizione). Progetto Leonardo, Soc. Ed. Esculapio, Bologna 2004.

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo e L. Giacomelli: Analisi matematica (seconda edizione). McGraw-Hill 2011.

[3] E. Giusti: Analisi matematica 1. Bollati Boringhieri 1991.

[4] E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003.

[5] E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo. Bollati Boringhieri 2000.

[6] E. Sernesi: Geometria 1. Bollati Boringhieri 1990.