Esercizi su potenziale di un campo vettoriale

0.1

Sia $F(x,y,z) := (2y, -x, -x)$ e C la circonferenza unitaria nel piano di equazione $z = y$ (centrata nell'origine). Calcolare il lavoro compiuto da F lungo C orientata a piacere.

0.2

Sia Σ l'arco di elica parametrizzato da

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e si consideri il campo di vettori

$$F(x,y,z) := (2xz, 2yz, x^2 + y^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare $\int_\Sigma F$.

$[2\pi]$

0.3

Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y) := \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)$$

è conservativo in $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0\}$ e, in caso affermativo, scriverne un potenziale. Dire infine se F è conservativo nel suo dominio di esistenza $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \neq 0\}$.

$\left[\text{sì; } \frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right]$

0.4

Si consideri il campo vettoriale piano

$$F(x,y) := (\sin(x+y) + x\cos(x+y)\,,\, x\cos(x+y)).$$

Stabilire se esso è conservativo in $\mathbf{R}^2$ ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

0.5

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) := (z\,,\, 3z\,,\, x+3y).$$

Stabilire se esso è conservativo in $\mathbf{R}^3$ ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

[sì; $z(x+3y)$]

0.6

Provare che il campo vettoriale

$$F(x,y) := (e^x(1+x-y)\,,\, -e^x)$$

è conservativo. Determinarne il potenziale che si annulla nell'origine.

0.7

Dimostrare che il campo

$$F(x,y) := (e^y - ye^x\,,\, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F$$

dove C è una curva qualsiasi avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

[0]

0.8

Dimostrare che il campo

$$F(x,y) := (e^y - ye^x \, , \, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F$$

dove C è una curva qualsiasi avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

0.9

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x,y) := (\,-2(y+1)x^{-3}, x^{-2})$$

è conservativo. In caso affermativo, determinare un potenziale di F.

0.10

Determinare l'insieme di esistenza del campo

$$F(x,y) := \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

Stabilire se F è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

0.11

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{2}{x-\frac{y}{x}}\,;\,\frac{1}{y-x^2}\right)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

0.12

Dimostrare che il campo di vettori

$$(x,y) \mapsto \left(\ln y - \frac{y}{x}\,,\,\frac{x}{y} - \ln x\right), \qquad (x,y) \in (0,+\infty)^2$$

soddisfa CIP. Determinarne il potenziale φ tale che $\varphi(1,1)=0$ e verificare che $\varphi(y,x)=-\varphi(x,y)$.

0.13

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) := \left(\frac{y^2+xy+1}{x+y}, \frac{x^2+xy+1}{x+y}\right), \qquad x+y \neq 0.$$

Dimostrare che F è conservativo.

0.14

Descrivere il dominio (massimale) di esistenza del campo

$$F(x,y) := \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), -\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Stabilire se F è conservativo. Nel caso che lo sia, se ne determini la famiglia dei potenziali.

0.15

Determinare $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2)$, sapendo che essa è potenziale del campo vettoriale

$$F(x,y) := (2x\varphi(x,y), \varphi(x,y))$$

e che $\varphi(0,0)=1$. Determinare poi

$$\int_C F$$

dove C è il grafico della funzione

$$x \mapsto x+\sin x, \qquad x \in [0,\pi]$$

orientato di modo che $(0,0)$ sia il punto iniziale.

0.16

Determinare un campo F con potenziale

$$\Phi(x,y) := x-3y+x^2, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Esistono altri campi con lo stesso potenziale? Motivare la risposta. Calcolare infine

$$\int_P F$$

dove P é la poligonale congiungente, nell'ordine, i punti:

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (0,2), \quad (3,3), \quad (0,4), \quad (5,5), \quad (0,6), \quad (7,7), \quad (0,8).$$

[No; − 24]

0.17

Considerato il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\, , \, \frac{y+\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

determinare un valore di α per cui si abbia

$$\int_C F = 0$$

per ogni circonferenza C centrata nell'origine e percorsa in senso orario.

[0]

0.18

Stabilire per quali valori di α il campo

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{\alpha + (1-\alpha)x}{x+e^{-y}}, \frac{1-\alpha+\alpha x}{x+e^{-y}} \right)$$

risulta conservativo nel primo quadrante del piano cartesiano.

[1]

0.19

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := (2x|y|, x^2).$$

- Determinare un potenziale di F in $(0, +\infty)^2$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di F in $(0, +\infty) \times (0, -\infty)$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di F di classe C^2 in un insieme aperto contenente almeno un punto della retta $y = 0$.

$\left[x^2 y;\ \text{non esiste};\ \text{non esiste}\right]$