Prova scritta del 1 febbraio 2016

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Indichiamo con I l'insieme di convergenza della serie e con f_n l'addendo, i.e.

$$f_n(x) = (nx^{2n} + n^{-3})^{1/2}.$$

Poiché ogni addendo è una funzione pari, si ha che I è un insieme simmetrico (rispetto all'origine). Inoltre, osserviamo che:

- Vale la disuguaglianza

  $$n^{1/2}x^n < f_n(x) \leq n^{1/2}x^n + n^{-3/2}$$

  per ogni $n \geq 1$ e per ogni $x \geq 0$;

- La serie di potenze

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/2}x^n$$

  ha raggio di convergenza 1 e più precisamente il suo insieme di convergenza è $(-1, 1)$.

Allora $I = (-1, 1)$. Inoltre, poiché

$$\|f_n\|_{\infty,[-r,r]} = \sup_{x\in[-r,r]} |(nx^{2n} + n^{-3})^{1/2}| = (nr^{2n} + n^{-3})^{1/2},$$

la serie converge totalmente in $L^\infty([-r, r])$ per ogni $r < 1$. Quindi la serie converge uniformemente in ogni intervallo $[-r, r]$ con $r < 1$.

Esercizio 2

- La funzione è ovviamente differenziabile, quindi anche continua, in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$;
- La funzione è ovviamente discontinua, quindi anche non differenziabile in

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,0) \mid x \in (2k\pi, 2k\pi + 2\pi)\};$$

- Nei punti della forma $(2k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ la funzione è differenziabile. Infatti, se $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(x,y) - \varphi(2k\pi, 0)| &= |\cos x - 1 + y^2| \\ &\leq |\cos x - \cos 2k\pi| + y^2 \end{aligned}$$

dove

$$|\cos x - \cos 2k\pi| = o(|x - 2k\pi|) = o\left(\sqrt{(x - \cos 2k\pi)^2 + y^2}\right)$$

e

$$y^2 = o\left(\sqrt{(x - \cos 2k\pi)^2 + y^2}\right)$$

per $(x, y) \to (2k\pi, 0)$. Quindi in tali punti la funzione φ è anche continua (come peraltro si vede subito direttamente).

Esercizio 3

Osserviamo che C è un cilindro circolare con asse parallelo a $\mathbb{R}_z$ e che P è un piano trasversale a C. Quindi $C \cap P$ è un'ellisse e una sua $(1,3)$-parametrizzazione C^1 a tratti continua è ovviamente data da $\Gamma = \{\gamma_1\}$ con

$$\gamma_1(t) := (1+\cos t\,,\ \sin t\,,\ 1+\cos t+\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \Phi &= \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin t \cos t, 0, \sin t - 1 - \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \sin^2 t \cos t - \sin^2 t + \sin t \cos t + \sin t - \cos t + \cos t \sin t + \\
&\qquad\qquad - \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t\, dt
\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_\Gamma \Phi = -3\pi.$$

Il campo vettoriale Φ non è conservativo. Infatti (dato che Γ è chiusa) se lo fosse dovrebbe essere $\int_\Gamma \Phi = 0$.