Prova scritta del 18 giugno 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

I seguenti fatti sono ovvi:

(1) La funzione f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$;

(2) Se $(x, y) \in A := (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ si ha $\nabla f(x, y) = 0$, mentre se $(x, y) \in B := (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ si ha $\nabla f(x, y) = (2x \sin x + (x^2 + y^2) \cos x, 2y \sin x)$;

(3) Dato che $f(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha $D_2 f(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Inoltre (per ogni $y \in \mathbb{R}$) si ha $D_1^- f(0, y) = 0$, mentre $D_1^+ f(0, y) = y^2$. Quindi nei punti dell'asse y il gradiente di f non esiste, eccetto che nell'origine dove esso esiste ed è uguale a $(0, 0)$.

Inoltre:

(4) Per il teorema del differenziale totale f è differenziabile in ogni punto di $A \cup B$;

(5) Per quanto stabilito in (3), f non è differenziabile nei punti dell'asse y diversi dall'origine;

(6) f è differenziabile in $(0, 0)$. Infatti si ha

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|(x^2 + y^2) \sin x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Esercizio 2

Si ha $P_0 = (a, 1)$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Allora $(2, 4)$ è un punto di minimo della funzione

$$\varphi(x, y) := (x - a)^2 + (y - 1)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ristretta ai punti della parabola $F(x, y) := y - x^2 = 0$ (vincolo). Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla\varphi(2, 4) = \lambda\nabla F(2, 4)$$

i.e.

$$(4 - 2a, 6) = \lambda(-4, 1)$$

da cui si ricava

$$\lambda = 6, \quad 4 - 2a = -4\lambda$$

e quindi

$$a = 2 + 2\lambda = 14.$$

Si è così provato che $P_0 = (14, 1)$.

Osserviamo infine che un vettore tangente alla parabola nel suo punto (x, x^2) è dato da $\tau(x) := (1, 2x)$. Allora si ha

$$\tau(2) \cdot [P_0 - (2, 4)] = (1, 4) \cdot [(14, 1) - (2, 4)] = (1, 4) \cdot (12, -3) = 0.$$

Esercizio 3

Sia $A := (1, +\infty) \times \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $F : A \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$F(x, y) := \frac{y}{x} + \frac{x}{x-1}.$$

Naturalmente $F \in C(A)$. Inoltre:

- Per ogni $P \in A$ esiste un intorno U di P tale che $U \subset A$ e F è di classe C^1 in U. Quindi F è localmente y-Lipschitziana in ogni punto di A;

- Se $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ sono tali che $1 < \alpha' < \beta' < +\infty$ e se $(x, y) \in (\alpha', \beta') \times \mathbb{R}$, allora

$$|F(x, y)| \leq \frac{|y|}{x} + \frac{x}{x-1} \leq \frac{|y|}{\alpha'} + \frac{\beta'}{(\alpha'-1)} \leq \frac{\beta'}{(\alpha'-1)}(1 + |y|).$$

Allora, per Proposizione 2.9 (cfr. diario del corso), il problema di Cauchy assegnato ha soluzione massimale e il dominio di tale soluzione è $(1, +\infty)$.

Si osservi che l'equazione differenziale in esame è lineare

$$y'(x) - \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Un fattore integrante è dato da $1/x$. Moltiplicando l'equazione per tale fattore, si ottiene

$$\frac{1}{x}\, y'(x) - \frac{1}{x^2}\, y(x) = \frac{1}{x-1}$$

i.e.

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x-1}.$$

Integrando fra 2 e x, con $x \in (1, +\infty)$, si trova

$$\frac{y(x)}{x} - \frac{y(2)}{2} = \int_2^x \frac{1}{t-1}\, dt$$

i.e.

$$y(x) = x \ln(x-1).$$