Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA II
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2014/2015

2 settembre 2015

1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x^2+1)}{n^3x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Studiare la convergenza puntuale di tale serie;
- Provare che essa converge totalmente in ogni insieme del tipo

$$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

  con $a > 0$;
- Cosa si può dire della continuità della funzione somma?

2. Provare che la funzione $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ definita come segue

$$\gamma(t) := \begin{cases} \left(t, t^2 \cos \frac{1}{t}, t^2 \sin \frac{1}{t}\right) & \text{se } t \neq 0, \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in 0 e vale $[d\gamma(0)] = (1, 0, 0)^t$. Determinare inoltre i punti di massimo e minimo assoluti di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$, dove

$$\varphi(x, y, z) := \sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale ordinaria lineare

$$y''(x) - 3y'(x) + \frac{9}{4}y(x) = \frac{9}{4}x + 6.$$

Ricavare poi la soluzione tale che $y(0) = y(1) = 5$.