

**Prova scritta di**  
**ANALISI MATEMATICA II**  
**per il Corso di Laurea in Matematica**  
**AA 2014/2015**

18 giugno 2015

1. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- Studiare la continuità di  $f$ ;
- Discutere l'esistenza di  $\nabla f$  e calcolarne l'espressione (dove esiste);
- Studiare la differenziabilità di  $f$ .

2. Applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, determinare  $P_0$  sulla retta  $y = 1$  sapendo che fra i punti della parabola  $y = x^2$  quello più vicino a  $P_0$  è  $(2, 4)$ . Verificare che il segmento congiungente i due punti è perpendicolare alla retta tangente alla parabola per  $(2, 4)$ .

3. Usare i teoremi generali provati nel corso per dimostrare l'esistenza della soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{x-1} \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Infine determinare esplicitamente tale soluzione massimale.