Prova scritta del 2 febbraio 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

L'insieme E è il sottografico della funzione $1 - x^2 - y^2$ sul settore circolare F compreso fra le rette

$$y = x, \qquad y = x\sqrt{3}$$

e la circonferenza

$$x^2 + y^2 = 1$$

nel primo quadrante di $\mathbb{R}^2_{xy}$. Quindi, usando le coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^3(E) &= \int_F (1 - x^2 - y^2)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 - \rho^2)\rho \, d\theta \right) d\rho \\
&= \frac{\pi}{12} \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{48}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Per la formula di Green si ha

$$\int_{(\partial E,\tau_E)} F = \int_E (D_1F_2 - D_2F_1) = \int_E 3x\,dxdy. \tag{1}$$

Osserviamo ora che l'insieme E è trasformato nel quadrato $Q := [1,2]\times[1,2]$ dal sistema

$$\begin{cases} y = ux^2 \\ y = \sqrt{vx} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = u^{-2/3}v^{1/3} \\ y = u^{-1/3}v^{2/3} \end{cases}$$

per cui la mappa $\Phi : Q \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\Phi(u,v) := \left(u^{-2/3}v^{1/3}\,,\, u^{-1/3}v^{2/3}\right)$$

è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare tale che $\Phi(Q) = E$. Come si verifica subito, si ha

$$J\Phi(u,v) = \frac{1}{3}u^{-2}$$

e quindi, da (1), applicando la formula dell'area, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{(\partial E,\tau_E)} F &= \int_{\Phi(Q)} 3x\,dxdy \\ &= \int_Q 3u^{-2/3}v^{1/3} \times \frac{1}{3}u^{-2}\,dudv \\ &= \int_Q u^{-8/3}v^{1/3}\,dudv.\end{aligned}$$

Si conclude usando il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{(\partial E,\tau_E)} F &= \int_1^2 \left(\int_1^2 u^{-8/3}v^{1/3}\,du\right) dv \\ &= \left(\int_1^2 u^{-8/3}\,du\right)\left(\int_1^2 v^{1/3}dv\right) \\ &= \frac{9}{20}(16^{1/3}-1)(1-32^{-1/3}).\end{aligned}$$

Esercizio 3

Si verifica subito che

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (\cos(y+z)\,,\,1\,,\,0)\,.$$

Inoltre, si osservi che il campo costante $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\nu(x,y,z) := \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

è un campo normale a S. Allora, scelta come τ l'orientazione di ∂S corrispondente a ν (nel senso del teorema di Stokes) e applicando il teorema di Stokes, si ottiene

$$\int_{(\partial S,\tau)} F = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{H}^2(S).$$

Poiché S è una semiellisse avente semiassi di lunghezza $\sqrt{2}$ e 1, si conclude:

$$\int_{(\partial S,\tau)} F = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$