Prova scritta del 8 giugno 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Poniamo $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e consideriamo

$$f : C \to \mathbb{R}, \quad \varphi : C \to \mathbb{R}^3$$

così definite

$$f(x,y) := \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

e

$$\varphi(x,y) := (x, y, f(x,y)) = \left(x, y, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right).$$

Allora il fattore di trasformazione dell'area è

$$J\varphi(x,y) = \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

Allora, per la formula dell'area, per il teorema di Fubini e cambiando la variabile (passando in coordinate polari):

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{x^2 + y^2}{e^z} d\mathcal{H}^2(x,y,z) &= \int_C \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}\, dxdy \\
&= \int_C \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho \, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(5^{3/2} - 2^{3/2} \right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si vede subito che
$$\operatorname{rot} F\,(x,y,z) = (0,-2xz^2,2).$$
Quindi, per il teorema di Stokes, si ha
$$\int_{(G,\nu)} (0,-xz^2,1) = \frac{1}{2}\int_{(G,\nu)} \operatorname{rot} F = \frac{1}{2}\int_{(\partial G,\tau)} F$$
dove τ orienta ∂G in modo tale che una parametrizzazione di $(\partial G,\tau)$ è data da
$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 2), \qquad t \in [0,2\pi]$$
e quindi
$$\int_{(\partial G,\tau)} F = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 2)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt = 2\pi.$$
Si conclude che
$$\int_{(G,\nu)} (0,-xz^2,1) = \pi.$$

Esercizio 3

Consideriamo la somma di Fourier

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove ricordiamo che

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si vede subito che $a_n = 0$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Inoltre, integrando per parti, troviamo

$$\begin{aligned} \pi b_n &= 2 \int_0^{\pi} (\pi + t) \sin nt \, dt = \left(\frac{-2 \cos nt}{n} (\pi + t) \right)_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \\ &= \frac{2\pi}{n} \left(1 + 2(-1)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Allora

$$S_N(x) = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1 + 2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Osserviamo che si ha (ovviamente)

$$S_N(k\pi) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

coerentemente a quanto afferma il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier, per il quale deve valere

$$\lim_{N \to \infty} S_N(k\pi) = \frac{f(k\pi + 0) + f(k\pi - 0)}{2} = 0.$$

Sempre per lo stesso teorema si ha che $S_N(x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k = 0, 1, 2, \ldots\}$.