Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2014/2015

8 gennaio 2015

1. Calcolare

$$\int_E (x^2 + y)z \, dxdydz$$

dove E è l'insieme ottenuto da una rotazione completa di

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{y}\}$$

intorno all'asse delle z.

2. Si consideri la curva regolare orientata (C, τ), dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2\}$$

e l'orientazione τ è scelta a piacere fra le due possibili. Calcolare

$$\int_{(C,\tau)} \big(\ln(2x - z + 1) \, , \, x + y - 1 \, , \, -yz/4 \big).$$

3. Per $R > 0$, sia

$$E_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le R\}$$
$$S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le R\}.$$

Inoltre si indichi con N il campo normale esterno a ∂E_R e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \left(\frac{xy^2}{(z+2)^2} \, , \, 0 \, , \, z \right).$$

Dopo aver verificato che per ogni $(x, y, z) \in S_R$ si ha

$$\frac{x^2y^2}{(z+2)^2} = F(x, y, z) \cdot N(x, y, z)$$

applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \frac{x^2y^2}{(z+2)^2} \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$