Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA 3
per il Corso di Laurea in Matematica
(appello di recupero)

AA 2016/2017

1 febbraio 2018

1. Calcolare
$$\int_E 4xyz\, dxdydz$$
dove E è la piramide di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$.

2. Si considerino la funzione
$$f(x) := (2+\cos x)\sin x, \quad x \in [0.\pi]$$
e il campo di vettori
$$F(x,y) := (y - 2\sin x, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Inoltre siano C e E, rispettivamente, il grafico di f e il sottografico di f. Infine, sia $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ l'orientazione di C tale che $\tau_1 < 0$. Applicare il teorema di Green (relativamente alla coppia E, F) per calcolare
$$\int_{(C,\tau)} F.$$

3. Per $x \in (-\pi, \pi)$, definiamo
$$f_1(x) := \cos x + \sin 2x, \qquad f_2(x) := \sin 2x - \cos x + \cos 7x$$
$$f_3(x) := 2\cos 7x - \sin 2x + \cos x.$$
Indicata con $\|\cdot\|_2$ la norma di $L^2(-\pi,\pi)$, calcolare $\|f_1\|_2$, $\|f_2\|_2$, $\|f_3\|_2$ e dimostrare che la famiglia
$$\left\{ \frac{f_1}{\|f_1\|_2}, \frac{f_2}{\|f_2\|_2}, \frac{f_3}{\|f_3\|_2} \right\}$$
è ortonormale e non è completa in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$.