Analisi Matematica 3 (recupero)

* * *

Prova scritta del 20 giugno 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$$

trasforma l'insieme A nell'insieme $R := [-1, 1] \times [-2, 2]$. Invertendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2}. \end{cases}$$

Allora, posto

$$\varphi(u, v) := \left(\frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} \right), \quad (u, v) \in R,$$

si ha $\varphi(R) = A$ e

$$J\varphi(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

per ogni $(u, v) \in (-1, 1) \times (-2, 2)$. Quindi φ è una $(2, 2)$-parametrizzazione regolare. Dalla formula dell'area si ottiene

$$\begin{aligned} I := & \int_{A=\varphi(R)} 4(x^2 + y^2)\, dxdy \\ = & \int_R [(u - v)^2 + (u + v)^2] \frac{1}{2}\, dudv \\ = & \int_R (u^2 + v^2)\, dudv \end{aligned}$$

e quindi, per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} I = & \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (u^2 + v^2)\, dv \right) du \\ = & \int_{-1}^{1} \left(4u^2 + \frac{16}{3} \right) du \\ = & \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Osserviamo che $\partial E = S \cup D$, con

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2 = 1\} \quad \text{(semisfera)}$$

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\, x^2+y^2 \leq 1\} \quad \text{(disco)}.$$

Inoltre, se Indichiamo con N il campo normale esterno a ∂E, si ha

$$N(x,y,z) = (x,y,z), \text{ per ogni } (x,y,z) \in S$$

oltre che

$$F(x,y,z) = 0, \text{ per ogni } (x,y,z) \in D.$$

Quindi, per il teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned} I := \int_E (x^2+y^2)\, dxdydz &= \int_E \operatorname{div} F\, dxdydz = \int_{\partial E} F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_S F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 + \int_D F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_S (yz, -xz, z(x^2+y^2)) \cdot (x,y,z)\, d\mathcal{H}^2(x,y,z) \\ &= \int_S z^2(x^2+y^2)\, d\mathcal{H}^2(x,y,z) \\ &= \int_S z^2(1-z^2)\, d\mathcal{H}^2(x,y,z). \end{aligned}$$

Ora se consideriamo la $(2,3)$-parametrizzazione regolare $\Phi : R := [0,2\pi] \times [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ di S definita da

$$\Phi(\varphi,\psi) := (\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi)$$

si ha

$$\begin{aligned} J\Phi(\varphi,\psi) &= |D_1\Phi(\varphi,\psi) \times D_2\Phi(\varphi,\psi)| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi & 0 \\ \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \end{pmatrix} \right| \\ &= \sin\psi. \end{aligned}$$

Quindi, per la formula dell'area

$$I = \int_{\Phi(R)} z^2(1-z^2)\, d\mathcal{H}^2(x,y,z) = \int_R \cos^2\psi(1-\cos^2\psi)\sin\psi\, d\varphi d\psi$$

da cui, per il teorema di Fubini

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi (1 - \cos^2 \psi) \sin \psi \, d\psi \right) d\varphi \\
&= 2\pi \int_{\pi/2}^{0} \cos^2 \psi (1 - \cos^2 \psi)(D \cos)(\psi) \, d\psi \\
&= 2\pi \int_0^1 t^2 (1 - t^2) \, dt \\
&= 2\pi \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right)_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

- La funzione f è continua e quindi anche continua a tratti. Essa però non è regolare a tratti perché la sua derivata non è limitata (in un intorno di 0). Dunque non si può applicare il teorema di convergenza puntuale.

- Si ha $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$ e quindi la serie di Fourier di f converge in $L^2(-\pi,\pi)$ a $f|_{(-\pi,\pi)}$. Allora, per il teorema di Carleson, tale serie converge a f puntualmente quasi ovunque.

- La funzione f è pari e $t \mapsto \sin(nt)$ è dispari (per ogni $n \geq 1$), per cui $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ è a sua volta dispari. Dunque si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0 \quad \text{(per ogni } n \geq 1\text{)}.$$