Analisi Matematica 3 (recupero)

* * *

Prova scritta del 18 luglio 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Osserviamo che per ogni $z \in [0,1]$ la sezione E_z non dipende da z e più precisamente si ha

$$\begin{aligned} E_z = F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\, y \ge x^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a,a],\, x^2 \le y \le (1-x^2)^{1/2}\} \end{aligned}$$

con

$$a := \left(\frac{5^{1/2}-1}{2}\right)^{1/2}.$$

Quindi, applicando due volte il teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned} I := \int_E x^2 y\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_{E_z} x^2 y\, dxdy\right) dz \\ &= \int_F x^2 y\, dxdy = 2\int_0^a \left(\int_{x^2}^{(1-x^2)^{1/2}} x^2 y\, dx\right) dy \end{aligned}$$

dove

$$2\int_{x^2}^{(1-x^2)^{1/2}} x^2 y\, dx = x^2 (y^2)_{y=x^2}^{y=(1-x^2)^{1/2}} = x^2(1-x^2-x^4) = x^2 - x^4 - x^6.$$

Si conclude che

$$I = \int_0^a (x^2 - x^4 - x^6)\, dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7}.$$

Esercizio 2

Se indichiamo con N il campo di vettori normali a S (con $N_3 > 0$) e con τ l'orientazione di ∂S indotta da (S, N), allora una parametrizzazione di $(\partial S, \tau)$ è data da

$$\gamma(t) := (\cos t \ \sin t\,,\, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Inoltre S è parametrizzata da

$$\varphi(\alpha, \beta) := (\sqrt{2}\sin\alpha\cos\beta\,,\, \sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta\,,\, \sqrt{2}\cos\alpha)$$

con $(\alpha, \beta) \in R := [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$.

Osserviamo che:

- si ha

  $$N(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad (x, y, z) \in S$$

  e

  $$\operatorname{rot} F = (D_2F_3 - D_3F_2\,,\, D_3F_1 - D_1F_3\,,\, D_1F_2 - D_2F_1) = (-1, -1, -1)$$

  per cui

  $$(N \cdot \operatorname{rot} F)(x, y, z) = -\frac{x + y + z}{\sqrt{2}}, \quad (x, y, z) \in S;$$

- per ogni $(\alpha, \beta) \in R$, si ha

  $$D_1\varphi(\alpha, \beta) \times D_2\varphi(\alpha, \beta) = (2\sin^2\alpha\cos\beta, 2\sin^2\alpha\sin\beta, 2\cos\alpha\sin\alpha)$$

  e quindi

  $$J\varphi(\alpha, \beta) = \|D_1\varphi(\alpha, \beta) \times D_2\varphi(\alpha, \beta)\| = 2\sin\alpha.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t + \ln(1 + \cos^2 t), 1 + \ln(1 + \sin^2 t), \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt + \int_0^{2\pi} \ln(1 + \cos^2 t)\, D\cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \ln(1 + \sin^2 t)\, D\sin t\, dt
\end{aligned}$$

dove il terzo integrale è nullo per il teorema fondamentale del calcolo mentre il secondo e il quarto sono nulli per la formula di integrazione per sostituzione. Si ha pertanto

$$\int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -\pi. \tag{1}$$

D'altra parte, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini,

$$
\begin{aligned}
\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S=\varphi(R)} (x+y+z) \, d\mathcal{H}^2 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_R \sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha) 2\sin\alpha \, d\alpha d\beta \\
&= -2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha(\cos\beta + \sin\beta) + \cos\alpha\sin\alpha \, d\beta \right) d\alpha \\
&= -2 \int_0^{\pi/4} \sin^2\alpha \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos\beta + \sin\beta) d\beta \right)}_{=0} d\alpha + \\
&\quad - 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha \\
&= -2\pi (\sin^2\alpha)_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/4}
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = -\pi. \tag{2}
$$

Per (1) e (2) si ha quindi

$$
\int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2.
$$

Esercizio 3

- (Proprietà di convergenza) Poiché $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Osserviamo poi che la funzione f è regolare a tratti ed è continua eccetto che nei punti dell'insieme $D := \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dove il limite destro e il limite sinistro valgono rispettivamente 1 e -1. Allora, indicando con S la somma della serie di Fourier, si ha intanto

$$S|_{\mathbb{Z}\setminus D} = f|_{\mathbb{Z}\setminus D}, \quad S|_D = 0.$$

Inoltre la serie di Fourier di f converge uniformemente a f negli insiemi del tipo

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi - \varepsilon, 2k\pi + \varepsilon)$$

con $\varepsilon \in (0,\pi)$.

- (Coefficienti) Poiché f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre, per $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\sin nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\sin nt\,dt\right) \\
&= \left(\frac{\cos nt}{n}\right)_{\pi/2}^{0} + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nt\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} tD\left(\frac{\cos nt}{n}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi/2}{n} + 2\left(\frac{\cos nt}{n}\right)_{\pi}^{\pi/2} + \frac{2}{n\pi}\left[(t\cos nt)_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos nt\,dt\right] \\
&= \frac{1}{n} + \frac{\cos n\pi/2}{n} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2(-1)^n}{n} - \frac{\cos n\pi/2}{n} - \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\sin nt}{n}\right)_{\pi/2}^{\pi}
\end{aligned}$$

cioè

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{2\sin n\pi/2}{n^2\pi}.$$

Si può quindi osservare che se n è pari si ha $b_n = 1/n$, mentre se n è dispari ($n = 2k+1$ con $k \geq 0$) si ha

$$b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}.$$