Analisi Matematica 3 (recupero)

* * *

Prova scritta del 8 gennaio 2018
Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Dal teorema di Fubini (sezioni piane parallele al piano coordinato xz) si ottiene

$$I := \int_E 3y\sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{E_y} 3y\sqrt{x^2+z^2}\,dxdz \right) dy. \tag{1}$$

Osserviamo che E_y è la corona circolare del piano xz centrata nell'origine, di raggi $2y$ e $1+y$. Poiché, per $y \in [0,1]$, si ha

$$E_y = \varphi(R_y), \qquad R_y := [2y, 1+y] \times [0, 2\pi]$$

dove

$$\varphi : R_y \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta)$$

dalla formula dell'area e di nuovo dal teorema di Fubini segue

$$\begin{aligned}
\int_{E_y=\varphi(R_y)} 3y\sqrt{x^2+z^2}\,dxdz &= \int_{R_y} 3y\rho^2\,d\rho d\theta \\
&= \int_{2y}^{1+y} \left(\int_0^{2\pi} 3y\rho^2\,d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi y \int_{2y}^{1+y} 3\rho^2 d\rho \\
&= 2\pi y (\rho^3)_{\rho=2y}^{\rho=1+y} \\
&= 2\pi(y + 3y^2 + 3y^3 - 7y^4).
\end{aligned}$$

Da tale identità e da (1) segue ora che

$$I = 2\pi \int_0^1 (y + 3y^2 + 3y^3 - 7y^4)\,dy = 2\pi \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} - \frac{7}{5} \right) = \frac{17}{10}\pi.$$

Esercizio 2

Si trova subito che

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (x\cos z\,,\,-y\cos z\,,\,4xy), \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Inoltre, indicato con N il campo normale a S con $N_3 \geq 0$, si ha

$$N(x,y,z) = (x,y,z), \qquad (x,y,z)\in S.$$

Allora, per il teorema di Stokes

$$\begin{aligned}
\int_S (x^2\cos z - y^2\cos z + 4xyz)\,d\mathcal{H}^2(x,y,z) &= \int_S (\operatorname{rot} F)\cdot N\,d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_{\partial S} F\cdot\tau\,d\mathcal{H}^1
\end{aligned} \tag{2}$$

dove τ indica l'orientazione di ∂S compatibile con N.

Ora, posto $C := \{(x,y,z)\in\partial S \mid z=0\}$, osserviamo che si ha:

- $F|_{\partial S\setminus C} \equiv 0$;
- Una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di C è data da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0), \quad t\in[0,\pi/2].$$

Pertanto, usando anche la formula dell'area

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F\cdot\tau\,d\mathcal{H}^1 = \int_C F\cdot\tau\,d\mathcal{H}^1 + \underbrace{\int_{\partial S\setminus C} F\cdot\tau\,d\mathcal{H}^1}_{=0} &= \int_C F\cdot\tau\,d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (-\cos t\sin^2 t, \cos^2 t\sin t, \cos t\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} D(\sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da tale risultato e da (2) segue subito che

$$\int_S (x^2 \cos z - y^2 \cos z + 4xyz)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

Coefficienti della serie di Fourier di f. Poiché f è pari, si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Inoltre

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

per cui

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\,dt + \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\,dt + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 1$. Si ha (per $n \geq 1$)

- $$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\,dt &= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi/2} tD[\sin(nt)]\,dt \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[(t\sin(nt))_{t=0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(nt)\,dt\right] \\ &= \frac{\sin(n\pi/2)}{n} + \frac{2}{\pi n}\left(\frac{\cos(nt)}{n}\right)_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{\sin(n\pi/2)}{n} + \frac{2}{\pi n^2}[\cos(n\pi/2) - 1]; \end{aligned}$$

- $$2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt = 2\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)_{t=\pi/2}^{t=\pi} = -\frac{2\sin(n\pi/2)}{n}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n^2}[\cos(n\pi/2) - 1] - \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} & \text{se } n = 2k-1, \text{ con } k = 1, 2, \dots \\ \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2} & \text{se } n = 2k, \text{ con } k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Proprietà di convergenza.

(1) Poiché $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $L^2(-\pi, \pi)$;

(2) Inoltre la funzione f è regolare a tratti e quindi la sua serie di Fourier:

- converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione S così definita:

$$S(x) := f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$S\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) := 3\pi/4 \quad (k \in \mathbb{Z});$$

- converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-\pi/2, \pi/2)$ e in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$.