Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 20 giugno 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$$

trasforma l'insieme A nell'insieme $R := [-1, 1] \times [-2, 2]$. Invertendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2}. \end{cases}$$

Allora, posto

$$\varphi(u, v) := \left(\frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} \right), \quad (u, v) \in R,$$

si ha $\varphi(R) = A$ e

$$J\varphi(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

per ogni $(u, v) \in (-1, 1) \times (-2, 2)$. Quindi φ è una $(2, 2)$-parametrizzazione regolare. Dalla formula dell'area si ottiene

$$\begin{aligned} I := & \int_{A=\varphi(R)} 4(x^2 + y^2) \, dxdy \\ = & \int_R [(u - v)^2 + (u + v)^2] \frac{1}{2} \, dudv \\ = & \int_R (u^2 + v^2) \, dudv \end{aligned}$$

e quindi, per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} I = & \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (u^2 + v^2) \, dv \right) du \\ = & \int_{-1}^{1} \left(4u^2 + \frac{16}{3} \right) du \\ = & \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Osserviamo che $\partial E = S \cup D$, con

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad \text{(semisfera)}$$

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{(disco)}.$$

Inoltre, se Indichiamo con N il campo normale esterno a ∂E, si ha

$$N(x, y, z) = (x, y, z), \text{ per ogni } (x, y, z) \in S$$

oltre che

$$F(x, y, z) = 0, \text{ per ogni } (x, y, z) \in D.$$

Quindi, per il teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}
I := \int_E (x^2 + y^2)\, dxdydz &= \int_E \operatorname{div} F\, dxdydz = \int_{\partial E} F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_S F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 + \int_D F \cdot N\, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_S (yz, -xz, z(x^2 + y^2)) \cdot (x, y, z)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z) \\
&= \int_S z^2(x^2 + y^2)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z) \\
&= \int_S z^2(1 - z^2)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z).
\end{aligned}$$

Ora se consideriamo la $(2, 3)$-parametrizzazione regolare $\Phi : R := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ di S definita da

$$\Phi(\varphi, \psi) := (\sin\psi \cos\varphi, \sin\psi \sin\varphi, \cos\psi)$$

si ha

$$\begin{aligned}
J\Phi(\varphi, \psi) &= |D_1\Phi(\varphi, \psi) \times D_2\Phi(\varphi, \psi)| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\psi \sin\varphi & \sin\psi \cos\varphi & 0 \\ \cos\psi \cos\varphi & \cos\psi \sin\varphi & -\sin\psi \end{pmatrix} \right| \\
&= \sin\psi.
\end{aligned}$$

Quindi, per la formula dell'area

$$I = \int_{\Phi(R)} z^2(1 - z^2)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z) = \int_R \cos^2\psi (1 - \cos^2\psi) \sin\psi\, d\varphi d\psi$$

da cui, per il teorema di Fubini

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\psi(1-\cos^2\psi)\sin\psi\, d\psi \right) d\varphi \\
&= 2\pi \int_{\pi/2}^{0} \cos^2\psi(1-\cos^2\psi)(D\cos)(\psi)\, d\psi \\
&= 2\pi \int_0^1 t^2(1-t^2)\, dt \\
&= 2\pi \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right)_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Relativamente alla serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n+1} n\, y^n \tag{1}$$

si ha

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1+(-1)^n}{n+1} n \right|^{1/n} = 1$$

da cui ricaviamo il raggio di convergenza $R = 1/\rho = 1$. Inoltre tale serie di potenze non converge per $y = \pm 1$ (poiché in entrambi i casi l'addendo della serie numerica corrispondente non è infinitesimo). L'insieme di convergenza puntuale di (1) è dunque l'intervallo $(-1, 1)$. Di conseguenza l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni assegnata è

$$D := \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Poiché (1) converge totalmente (in L^∞) negli intervalli del tipo $[-r, r]$ con $r \in (0, 1)$, la serie assegnata converge totalmente (in L^∞) negli insiemi del tipo

$$\sin^{-1}([-r, r]) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin x \in [-r, r]\}, \text{ con } r \in (0, 1).$$

Ciò equivale a dire che la serie assegnata converge totalmente (in L^∞) negli insiemi del tipo

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + k\pi - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon \right], \text{ con } \varepsilon > 0.$$