

Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 18 luglio 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Osserviamo che per ogni $z \in [0, 1]$ la sezione E_z non dipende da z e più precisamente si ha

$$\begin{aligned} E_z = F &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, a], x^2 \leq y \leq (1 - x^2)^{1/2}\} \end{aligned}$$

con

$$a := \left(\frac{5^{1/2} - 1}{2} \right)^{1/2}.$$

Quindi, applicando due volte il teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned} I &:= \int_E x^2 y \, dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{E_z} x^2 y \, dx dy \right) dz \\ &= \int_F x^2 y \, dx dy = 2 \int_0^a \left(\int_{x^2}^{(1-x^2)^{1/2}} x^2 y \, dy \right) dx \end{aligned}$$

dove

$$2 \int_{x^2}^{(1-x^2)^{1/2}} x^2 y \, dy = x^2 (y^2)_{y=x^2}^{y=(1-x^2)^{1/2}} = x^2 (1 - x^2 - x^4) = x^2 - x^4 - x^6.$$

Si conclude che

$$I = \int_0^a (x^2 - x^4 - x^6) \, dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7}.$$

Esercizio 2

Se indichiamo con N il campo di vettori normali a S (con $N_3 > 0$) e con τ l'orientazione di ∂S indotta da (S, N) , allora una parametrizzazione di $(\partial S, \tau)$ è data da

$$\gamma(t) := (\cos t \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Inoltre S è parametrizzata da

$$\varphi(\alpha, \beta) := (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \beta, \sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta, \sqrt{2} \cos \alpha)$$

con $(\alpha, \beta) \in R := [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$.

Osserviamo che:

- si ha

$$N(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}} \right), \quad (x, y, z) \in S$$

e

$$\text{rot } F = (D_2 F_3 - D_3 F_2, D_3 F_1 - D_1 F_3, D_1 F_2 - D_2 F_1) = (-1, -1, -1)$$

per cui

$$(N \cdot \text{rot } F)(x, y, z) = -\frac{x + y + z}{\sqrt{2}}, \quad (x, y, z) \in S;$$

- per ogni $(\alpha, \beta) \in R$, si ha

$$D_1 \varphi(\alpha, \beta) \times D_2 \varphi(\alpha, \beta) = (2 \sin^2 \alpha \cos \beta, 2 \sin^2 \alpha \sin \beta, 2 \cos \alpha \sin \alpha)$$

e quindi

$$J\varphi(\alpha, \beta) = \|D_1 \varphi(\alpha, \beta) \times D_2 \varphi(\alpha, \beta)\| = 2 \sin \alpha.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t + \ln(1 + \cos^2 t), 1 + \ln(1 + \sin^2 t), \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt + \int_0^{2\pi} \ln(1 + \cos^2 t) D \cos t \, dt + \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \ln(1 + \sin^2 t) D \sin t \, dt \end{aligned}$$

dove il terzo integrale è nullo per il teorema fondamentale del calcolo mentre il secondo e il quarto sono nulli per la formula di integrazione per sostituzione. Si ha pertanto

$$\int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi. \quad (1)$$

D'altra parte, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}
 \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S=\varphi(R)} (x+y+z) \, d\mathcal{H}^2 \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_R \sqrt{2}(\sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha) 2 \sin \alpha \, d\alpha d\beta \\
 &= -2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha (\cos \beta + \sin \beta) + \cos \alpha \sin \alpha \, d\beta \right) d\alpha \\
 &= -2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \alpha \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos \beta + \sin \beta) d\beta \right)}_{=0} d\alpha + \\
 &\quad - 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha \\
 &= -2\pi (\sin^2 \alpha) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/4}
 \end{aligned}$$

cioè

$$\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = -\pi. \tag{2}$$

Per (1) e (2) si ha quindi

$$\int_{\partial S} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2.$$

Esercizio 3

- (Proprietà di convergenza) Poiché $f|_{(-\pi, \pi)} \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$. Osserviamo poi che la funzione f è regolare a tratti ed è continua eccetto che nei punti dell'insieme $D := \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dove il limite destro e il limite sinistro valgono rispettivamente 1 e -1 . Allora, indicando con S la somma della serie di Fourier, si ha intanto

$$S|_{\mathbb{Z} \setminus D} = f|_{\mathbb{Z} \setminus D}, \quad S|_D = 0.$$

Inoltre la serie di Fourier di f converge uniformemente a f negli insiemi del tipo

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi - \varepsilon, 2k\pi + \varepsilon)$$

con $\varepsilon \in (0, \pi)$.

- (Coefficienti) Poiché f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre, per $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \sin nt \, dt + \int_{\pi/2}^\pi (\pi - t) \sin nt \, dt \right) \\ &= \left(\frac{\cos nt}{n} \right)_{\pi/2}^0 + 2 \int_{\pi/2}^\pi \sin nt \, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi t D \left(\frac{\cos nt}{n} \right) dt \\ &= \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi/2}{n} + 2 \left(\frac{\cos nt}{n} \right)_\pi^{\pi/2} + \frac{2}{n\pi} \left[(t \cos nt)_{\pi/2}^\pi - \int_{\pi/2}^\pi \cos nt \, dt \right] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{\cos n\pi/2}{n} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2(-1)^n}{n} - \frac{\cos n\pi/2}{n} - \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\sin nt}{n} \right)_{\pi/2}^\pi \end{aligned}$$

cioè

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{2 \sin n\pi/2}{n^2\pi}.$$

Si può quindi osservare che se n è pari si ha $b_n = 1/n$, mentre se n è dispari ($n = 2k + 1$ con $k \geq 0$) si ha

$$b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}.$$