Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 7 settembre 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Consideriamo l'insieme compatto

$$C := \{(\theta, \rho) \,|\, \theta \in [0, \pi/4],\ \rho \in [1, 2/\cos\theta]\}$$

e la $(2,2)$-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\theta, \rho) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \qquad (\theta, \rho) \in C.$$

Allora si ha $E = \varphi(C)$ e quindi, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{E=\varphi(C)} x^2 y\, dxdy &= \int_C \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\sin\theta\, \rho\, d\theta d\rho \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{2/\cos\theta} \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, \sin\theta\, (\rho^5)_{\rho=1}^{\rho=2/\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} [32\cos^{-3}\theta - \cos^2\theta](D\cos)(\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} D\left(-16\cos^{-2}\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \left(-32 - \frac{1}{6\sqrt{2}} + 16 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{47}{15} + \frac{\sqrt{2}}{60}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Consideriamo il campo di vettori

$$F(x,y) := (-y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora, per la formula di Green, si ha

$$\int_{\partial E} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = \int_E (D_1F_2 - D_2F_1) d\mathcal{L}^2 = 2\mathcal{L}^2(E)$$

dove con τ abbiamo indicato il campo tangente unitario che orienta ∂E positivamente. Ne segue che

$$2\mathcal{L}^2(E) = \int_{C_1} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 + \int_{C_2} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$

Osserviamo che per ogni $(x,y) \in C_2$ si ha

$$F(x,y) \cdot \tau(x,y) = (0,x) \cdot (-1,0) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}^2(E) &= \int_{C_1} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-t\sin t, t\cos t) \cdot (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t \\
&= \int_0^{2\pi} t^2 dt \\
&= \frac{8}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{L}^2(E) = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Esercizio 3

Convergenza puntuale. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, 1]$ e il limite puntuale della successione assegnata è dato dalla funzione $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Convergenza L^∞. Osserviamo subito che se $a \in (-\infty, 1)$ allora la successione non può convergere uniformemente sugli insiemi del tipo $[a, 1]$, in quanto (per n sufficientemente grande) $f_n|_{[a,1]}$ è continua, mentre il suo limite puntuale $f|_{[a,1]}$ non lo è. Pertanto la successione non può convergere in $L^\infty([a, 1])$. A maggior ragione essa non può convergere in $L^\infty((-\infty, 1])$. Rimane da chiarire se la successione converga in $L^\infty((-\infty, b])$ con $-\infty < b < 1$ oppure in $L^\infty([a, b])$ con $-\infty < a < b < 1$. A questo scopo procediamo allo studio della funzione f_n.

Osserviamo che f_n è derivabile in ogni $x \neq -e^n$ e si ha

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx}(x + e^n) - e^{nx}}{(x + e^n)^2} = \frac{n(x + e^n) - 1}{(x + e^n)^2} e^{nx}$$

che si annulla nel punto $x_n := -e^n + 1/n$. Allora f_n ha le seguenti proprietà:

- In $(-\infty, -e^n)$ è negativa, decrescente e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-e^{-n}-0} f_n(x) = -\infty;$$

- In $(-e^n, +\infty)$ è positiva. Inoltre essa è
  - decrescente in $(-e^n, x_n]$, con

$$\lim_{x\to-e^{-n}+0} f_n(x) = +\infty;$$

  - crescente in $[x_n, +\infty)$, con

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Da queste proprietà segue ora che:

- Se $-\infty < b < 1$, allora

$$\|f_n - f\|_{\infty,(-\infty,b]} = \|f_n\|_{\infty,(-\infty,b]} = +\infty$$

per n sufficientemente grande. Quindi la successione non converge in $L^\infty((-\infty, b])$;

- Se $-\infty < a < b < 1$, dato che x_n converge a $-\infty$ si avrà che $x_n < a$ per n sufficientemente grande. Quindi

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(b)$$

per n sufficientemente grande. Se ne conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = f(b) = 0$$

e cioè che la successione converge in $L^\infty([a, b])$.