Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 1 febbraio 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Dal teorema di Fubini (sezioni con piani ortogonali all'asse z) si ottiene

$$\begin{aligned} I := \int_E 4xyz\, dxdydz &= 4\int_0^1 \left(\int_{E_z} xyz\, dxdy\right) dz \\ &= 4\int_0^1 z\left(\int_{E_z} xy\, dxdy\right) dz. \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$E_z = [0, 1-z] \times [z, 1] \qquad (z \in [0, 1]).$$

e quindi, utilizzando un'altra volta il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{E_z} xy\, dxdy &= \int_{[0,1-z]\times[z,1]} xy\, dxdy = \int_0^{1-z} \left(\int_z^1 xy\, dy\right) dx \\ &= \int_0^{1-z} x \left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=z}^{y=1} dx = \frac{1-z^2}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{x=1-z} \\ &= \frac{(1-z^2)(1-z)^2}{4} = \frac{-z^4+2z^3-2z+1}{4}. \end{aligned}$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 z(-z^4+2z^3-2z+1)dz = \int_0^1 -z^5+2z^4-2z^2+z\, dz \\ &- \frac{1}{6} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Posto (per $n \geq 1$)

$$a_n := \frac{1}{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$$

si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left[\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{2(n+1)}}\right]^{1/2}$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie data vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \times 1 \times \left[\frac{e}{e}\right]^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che

$$\|a_n x^n\|_{\infty,[-1/2,1/2]} = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{n^2}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2}$$

e quindi, ricordando che $\lim_{n\to+\infty}(1+1/2n)^{2n} = e < 4$, si ha

$$\|a_n x^n\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \frac{2}{n^2}$$

definitivamente, i.e. da un certo n in poi. Se ne conclude che:

- L'intervallo di convergenza è $[-1/2, 1/2]$;
- La serie data converge totalmente in $(L^\infty([-1/2,1/2]), \|\cdot\|_{\infty,[-1/2,1/2]})$. In particolare la serie converge anche uniformemente nell'intervallo di convergenza.

Esercizio 3

Osserviamo che $\partial E = C \cup C'$, con $C' := [0, \pi] \times \{0\}$. Se scegliamo per C' l'orientazione $\tau' := (1, 0)$, il teorema di Green si può scrivere come segue

$$\int_E (D_1 F_2 - D_2 F_1) dxdy = \int_C F \cdot \tau dH^1 + \int_{C'} F \cdot \tau' dH^1. \tag{1}$$

Sostituendo in (1) le identità

$$D_1 F_2(x, y) = 0, \quad D_2 F_1(x, y) = 1$$

e

$$F(x, y) \cdot \tau'(x, y) = F_1(x, y) = y - 2 \sin x$$

otteniamo

$$\int_E -1 \, dxdy = \int_C F \cdot \tau dH^1 + \int_{C'} (y - 2 \sin x) dH^1(x, y)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot \tau \, dH^1 &= \int_E -1 \, dxdy - \int_{C'} (y - 2 \sin x) dH^1(x, y) \\ &= -\mathcal{L}^2(E) + 2 \int_{C'} \sin x \, dH^1(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(E) &= \int_0^\pi (2 + \cos x) \sin x \, dx = -\int_0^\pi (2 + \cos x) D(2 + \cos x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi D(2 + \cos x)^2 dx = -\frac{1 - 9}{2} = 4 \end{aligned} \tag{3}$$

e per la formula dell'area (parametrizzando C' con $\gamma(t) := (t, 0)$, dove $t \in [0, \pi]$)

$$\int_{C'} \sin x \, dH^1(x, y) = \int_0^\pi \sin t \, dt = 2. \tag{4}$$

Sostituendo (3) e (4) in (2), concludiamo che

$$\int_C F \cdot \tau \, dH^1 = -4 + 4 = 0.$$