Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 11 giugno 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Dal teorema di Fubini (fibre verticali) otteniamo

$$
\begin{aligned}
I := \int_E \frac{2(x+y)z}{3x^2+2xy}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) &= \int_D \frac{x+y}{3x^2+2xy}\left(\int_{x+y}^{2x+y} 2z\, dz\right) d\mathcal{L}^2(x,y) \\
&= \int_D \frac{x+y}{3x^2+2xy}(z^2)_{z=x+y}^{z=2x+y}\, d\mathcal{L}^2(x,y) \\
&= \int_D (x+y)\, d\mathcal{L}^2(x,y).
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che D è l'immagine della $(2,2)$-parametrizzazione regolare (cambio di coordinate da cartesiane a polari)

$$\varphi(\rho,\theta) := (2+\rho\cos\theta, 3+\rho\sin\theta), \quad (\rho,\theta) \in C := [0,1] \times [0,2\pi].$$

Possiamo allora applicare la formula dell'area (si ricordi che $J\varphi(\rho,\theta) = \rho$):

$$
\begin{aligned}
I = \int_{D=\varphi(C)} (x+y)\, d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_C [\rho(\cos\theta+\sin\theta)+5]\rho\, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) \\
&= \int_C \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)\, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) + \int_C 5\rho\, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta).
\end{aligned}
$$

Usando il teorema di Fubini per calcolare i due integrali dell'ultimo membro, si trova

$$\int_C \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)\, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) = \int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\right) d\rho = 0$$

e

$$\int_C 5\rho\, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) = \int_0^1 5\rho\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) d\rho = 10\pi\int_0^1 \rho\, d\rho = 5\pi.$$

Dunque $I = 5\pi$.

Esercizio 2

Naturalmente di ha

$$N(x,y,z) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ per ogni } (x,y,z) \in D$$

e inoltre col calcolo diretto si trova subito che

$$\text{rot}F(x,y,z) = (0, 1-2x, 2x-1) \text{ per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Ne segue che

$$(\text{rot}\, F(x,y,z)) \cdot N(x,y,z) = \frac{1-2x+2x-1}{\sqrt{2}} = 0$$

per ogni $(x,y,z) \in D$, da cui

$$\int_{(D;N)} \text{rot}\, F = \int_D (\text{rot}\, F) \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = 0.$$

Rimane da provare che si ha anche

(1) $$\int_{\partial(D;N)} F = 0.$$

A questo scopo, osserviamo che:

- ∂D è la circonferenza unitaria contenuta nel piano $z = -y$ e avente per centro l'origine di $\mathbb{R}^3$;
- L'orientazione di ∂D indotta da N è quella per cui D rimane alla sinistra di un "osservatore" che percorra ∂D stando sulla "faccia positiva" di D;
- I vettori
$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$$
formano una base ortonormale del piano $z = -y$. Inoltre, per il punto precedente, la funzione
$$\gamma(t) = u_1 \cos t + u_2 \sin t = \left(\cos t, \frac{\sqrt{2}\sin t}{2}, \frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$
è una parametrizzazione di ∂D con l'orientazione indotta da N.

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{\partial(D;N)} F &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, \cos^2 t, \cos^2 t) \cdot \left(-\sin t, \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}, \frac{-\sqrt{2}\cos t}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} D(\cos t)^2 dt
\end{aligned}$$

da cui segue la nostra tesi, cioè (1).

Esercizio 3

Convergenza puntuale. Posto

$$a_n(x) := \frac{nx^n}{x^2+n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{n+1}{n} \times \frac{x^2+n}{x^2+n+1}\, x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

da cui segue subito

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = |x| \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Quindi, indicato con I l'insieme di convergenza della serie, si ottiene:

- La serie converge assolutamente in $(-1,1)$. In particolare $(-1,1) \subset I$;
- $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \subset I^c$

Osserviamo inoltre che

$$|a_n(\pm 1)| = \frac{n}{1+n}.$$

Poiché tale successione non è infinitesima, si ha $\pm 1 \in I^c$. Si conclude che

$$I = (-1,1).$$

Convergenza totale (rispetto a $\|\cdot\|_\infty$). Osserviamo prima di tutto che a_n è una funzione pari (dispari) se n è pari (dispari). Inoltre si ha

$$a_n'(x) = \frac{nx^{n-1}[(n-2)x^2+n^2]}{(x^2+n)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ne segue che:

- Si ha
$$\|a_n\|_{\infty,I} = a_n(1) = \frac{n}{1+n} \qquad (n \geq 1).$$
Quindi la serie non converge totalmente in $(L^\infty(I), \|\cdot\|_{\infty,I})$ (e dunque nemmeno in $(C_b(I), \|\cdot\|_{\infty,I})$);
- Posto $I_r = (-r,r)$, con $0 < r < 1$, si ha
$$\|a_n\|_{\infty,I_r} = a_n(r) \qquad (n \geq 1).$$
Quindi la serie converge totalmente in $(C_b(I_r), \|\cdot\|_{\infty,I_r})$ (e dunque anche in $(L^\infty(I_r), \|\cdot\|_{\infty,I_r})$).

Continuità in I della funzione somma. Indicata con $S(x)$ la somma della serie in $x \in I$, da quanto precede si ha

$$S|_{I_r} \in C_b(I_r) \subset C(I_r), \text{ per ogni } r \in (0,1).$$

Per l'arbitrarietà di r, si conclude che S è continua in ogni punto di I.