Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 9 luglio 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Osserviamo che:

- Per $z \in [1,2]$ la sezione E_z è la corona circolare centrata in $(0,0)$ di raggi $z/2$ e z;
- Per $z \in \mathbb{R} \setminus [1,2]$ si ha $E_z = \emptyset$.

Allora, per il teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali), si ha

$$I := \int_E (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^3(x,y,z) = \int_{[1,2]} \left(\int_{E_z} (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^2(x,y) \right) d\mathcal{L}^1(z)$$

dove, per la formula dell'area (cambiamento delle variabili da cartesiane a polari) e di nuovo per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{E_z} (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{z/2}^{z} [(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2]^{1/2} \rho\, d\rho \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{z/2}^{z} \rho^2\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(\rho^3\right)_{\rho=z/2}^{\rho=z} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(z^3 - \frac{z^3}{8} \right) \\
&= \frac{7\pi z^3}{12}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{7\pi}{12} \int_1^2 z^3 dz = \frac{7\pi}{12} \left(\frac{z^4}{4} \right)_{z=1}^{z=2} = \frac{35\pi}{16}.$$

Esercizio 2

Si ha

$$N|_{\Gamma_1} = (0,0,-1), \quad F_3|_{\Gamma_1} = 0$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\Gamma_1} F_3 N_3 \, d\mathcal{H}^2 = 0. \tag{1}$$

Inoltre

$$\varphi : C := [1,2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2)$$

è una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di Γ_2, con $J\varphi(\rho,\theta) = \rho$. Poiché $N|_{\Gamma_2} = (0,0,1)$, dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini segue allora che

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 &= \int_{\Gamma_2 = \varphi(C)} F_3 \, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_C F_3(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2) J\varphi(\rho,\theta) \, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) \\
&= \int_C \rho^2 \, d\mathcal{L}^2(\rho,\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \rho^2 \, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{2\pi(8-1)}{3}
\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = \frac{14\pi}{3}. \tag{2}$$

Ora osserviamo che

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = (x^2+y^2)^{1/2}$$

per cui, grazie al teorema della divergenza e alle identità (1) e (2), si trova

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^3(x,y,z) &= \int_E \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^3 \\
&= \int_{\partial E = S \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_S F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Gamma_1} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Gamma_2} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_S F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 + \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Pertanto, ricordando il risultato dell'esercizio 1, otteniamo

$$\int_S F \cdot N \, d\mathcal{H}^2 = \int_E (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^3(x,y,z) - \frac{14\pi}{3} = \frac{35\pi}{16} - \frac{14\pi}{3} = \frac{-119\pi}{48}.$$

Esercizio 3

Per $N \geq 1$, definiamo

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{x^2 - 2n^2 x}{n^4} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

e osserviamo che

$$S_N(x) = x^2 A_N + x B_N \quad (x \in \mathbb{R})$$

dove

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}, \quad B_N := -\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^2}.$$

Ricordiamo che le successioni $\{A_N\}$ e $\{B_N\}$ hanno limite finito e poniamo

$$A := \lim_{N\to+\infty} A_N, \quad B := \lim_{N\to+\infty} B_N.$$

Valgono i seguenti fatti:

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

  $$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = S(x) := x^2 A + xB$$

  cioè la serie data converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione S;

- La funzione $S - S_N$ è un polinomio di secondo grado non nullo e quindi

  $$\|S - S_N\|_{\infty,\mathbb{R}} = +\infty \quad \text{(per ogni } N\text{)}.$$

  Pertanto la serie non converge uniformemente in $\mathbb{R}$;

- Sia $a \in (0, +\infty)$ arbitrariamente fissato. Allora

  $$\begin{aligned} |S(x) - S_N(x)| &= |(A - A_N)x^2 + (B - B_N)x| \\ &\leq (A - A_N)x^2 + |(B - B_N)x| \\ &= (A - A_N)x^2 + (B_N - B)|x| \\ &\leq (A - A_N)a^2 + (B_N - B)a \end{aligned}$$

  per ogni $x \in [-a, a]$, da cui segue

  $$\|S - S_N\|_{\infty,[-a,a]} \leq (A - A_N)a^2 + (B_N - B)a.$$

  Dunque la serie converge uniformemente in $[-a, a]$ (per ogni $a \in (0, +\infty)$).