Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 16 luglio 2019

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1 Osserviamo che

- Se $z \in [0,1]$, si ha $E_z = D$;
- Se $z \in [1,2]$, la sezione E_z è il disco centrato in $(0,0)$ di raggio $(2-z)^{1/2}$.

Per il teorema di Fubini (sezioni piane parallele a $\mathbb{R}^2_{xy}$) si ha

$$\begin{aligned}\int_E \operatorname{div} F dL^3 &= \int_E (2+2z) dL^3 = \int_0^2 (2+2z) L^2(E_z) dz \\ &= \pi \int_0^1 (2+2z) dz + \pi \int_1^2 (2+2z)(2-z) dz \\ &= 3\pi + \frac{7\pi}{3}\end{aligned}$$

cioè

$$\int_E \operatorname{div} F dL^3 = \frac{16\pi}{3}. \tag{1}$$

Osserviamo ora che ∂E è l'unione di tre tratti regolari:

$$\partial E = G \cup C \cup B$$

dove

- G è il grafico di $D \ni (x,y) \mapsto 2 - x^2 - y^2$;
- C è il cilindro $\partial D \times [0,1]$;
- $B = D \times \{0\}$.

Indicato con N il campo delle normali esterne a ∂E, si ha (teorema della divergenza 3D)

$$\int_E \operatorname{div} F dL^3 = \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2 = \int_G F \cdot N \, dH^2 + \int_C F \cdot N \, dH^2 + \int_B F \cdot N \, dH^2$$

dove

$$\int_C F \cdot N \, dH^2 = \int_C (x, y, z^2) \cdot (x, y, 0) \, dH^2 = \int_C \underbrace{x^2 + y^2}_{=1} \, dH^2 = H^2(C) = 2\pi$$

e

$$\int_B F \cdot N \, dH^2 = \int_{D \times \{0\}} (x, y, \underbrace{z^2}_{=0}) \cdot (0, 0, -1) \, dH^2 = 0.$$

Quindi, ricordando (1), troviamo

$$\frac{16\pi}{3} = \int_G F \cdot N \, dH^2 + 2\pi$$

da cui si conclude

$$\int_G F \cdot N \, dH^2 = \frac{16\pi}{3} - 2\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

Esercizio 2

Sia $u \in \partial B \cap \mathbb{R}^2_{yz}$. Se indichiamo con θ l'angolo formato da u con la direzione positiva dell'asse y, si ha ovviamente

$$u = (0, \cos\theta, \sin\theta).$$

Poniamo per semplicità

$$a := \cos\theta, \quad b := \sin\theta$$

cosicché

$$u = (0, a, b).$$

Allora la coppia di vettori unitari

$$e_1 := (1, 0, 0), \quad e_2 := (0, b, -a)$$

formano una base ortonormale di Π_u tale che

$$\gamma_u(t) := e_1 \cos t + e_2 \sin t = (\cos t, b \sin t, -a \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di $\partial(B \cap \Pi_u)$, intesa come curva orientata (la cui orientazione è indotta da u). Poiché

$$\gamma_u'(t) = (-\sin t, b \cos t, -a \cos t), \quad t \in (0, 2\pi)$$

si trova

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_{\partial(B \cap \Pi_u)} (y^2, -z, x) \\
&= \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^2 t, a \sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, b \cos t, -a \cos t)\, dt \\
&= -b^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt + ab \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt - a \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \\
&= -a\pi
\end{aligned}$$

cioè

$$\Phi(u) = -\pi \cos\theta.$$

Si conclude quindi che

$$\min_{u \in \partial B \cap \mathbb{R}^2_{yz}} \Phi = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} (-\pi \cos\theta) = -\pi$$

e

$$\max_{u \in \partial B \cap \mathbb{R}^2_{yz}} \Phi = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} (-\pi \cos\theta) = \pi.$$

Esercizio 3

La serie assegnata

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) := n(x^2-1)^{n^2-1} \tag{2}$$

è una serie di potenze "mascherata". Infatti essa può essere espressa come segue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k \tag{3}$$

con

$$y = x^2 - 1, \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } \nexists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } k = n^2-1, \\ n & \text{se } \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } k = n^2-1. \end{cases}$$

Poiché

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/(n^2-1)} = \limsup_{n\to\infty} (n^{1/n})^{n/(n^2-1)} = 1$$

il raggio di convergenza della serie (3) è 1. Inoltre, poiché la successione dei coefficienti a_k non è infinitesima, la serie (3) non converge né in 1 né in -1. Relativamente alla serie (3), possiamo quindi affermare che:

- Il suo insieme di convergenza puntuale è $(-1,1)$;
- Essa converge totalmente in $(C([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r \in (0,1)$.

Di conseguenza:

- L'insieme di convergenza puntuale della serie (2) è

  $$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x^2 - 1 < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\};$$

- Se $r \in (0,1)$, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k(x^2-1)^k\|_{\infty,E_r}$ converge, dove

  $$E_r := \{x \in \mathbb{R} \,|\, -r \le x^2 - 1 \le r\} = [-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}] \setminus [-\sqrt{1-r}, \sqrt{1-r}].$$

  In altri termini, per ogni $r \in (0,1)$, la serie (2) converge totalmente in $(C(E_r), \|\cdot\|_{\infty,E_r})$ e quindi anche uniformemente in E_r. Poiché

  $$\lim_{r\to 1-} \sqrt{1+r} = \sqrt{2}, \qquad \lim_{r\to 1-} \sqrt{1-r} = 0$$

  possiamo anche affermare che, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, la serie (2) converge totalmente in $(C(I_\varepsilon), \|\cdot\|_{\infty,I_\varepsilon})$ e quindi anche uniformemente in I_ε, dove

  $$I_\varepsilon := [-\sqrt{2}+\varepsilon, \sqrt{2}-\varepsilon] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon].$$