Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 20 giugno 2019

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Per il teorema di Fubini (sezioni parallele al piano xy) si ha

$$\begin{aligned}\int_{P\times[0,1]} \frac{z}{x+y}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) &= \int_0^1 z \left(\int_P \frac{1}{x+y}\, d\mathcal{L}^2(x,y)\right) dz \\ &= \frac{1}{2}\int_P \frac{1}{x+y}\, d\mathcal{L}^2(x,y).\end{aligned} \tag{1}$$

Calcoleremo l'integrale all'ultimo membro usando la formula dell'area. Per questo osserviamo che ogni punto di P è l'intersezione di due rette

$$y = s + \frac{x}{2}, \quad y = t - x$$

con $(s,t) \in [0,2]\times[2,8]$. Invertendo tale sistema, si ottiene

$$x = \frac{2t-2s}{3}, \quad y = \frac{t+2s}{3}.$$

Allora la mappa

$$\varphi : R := [0,2]\times[2,8] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s,t) := \left(\frac{2t-2s}{3}, \frac{t+2s}{3}\right)$$

è una $(2,2)$-parametrizzazione di P (cambio di variabili) e si ha

$$J\varphi(s,t) = \left|\det\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}$$

per ogni $(s,t)\in R$. Dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini otteniamo allora

$$\begin{aligned}\int_{P=\varphi(R)} \frac{1}{x+y}\, d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_R \left(\frac{1}{x+y}\right)_{(x,y)=\varphi(s,t)} J\varphi(s,t)\, d\mathcal{L}^2(s,t) \\ &= \frac{2}{3}\int_R \frac{1}{t}\, d\mathcal{L}^2(s,t) \\ &= \frac{2}{3}\int_0^2 \left(\int_2^8 \frac{1}{t}\, dt\right) ds \\ &= \frac{8\ln 2}{3}.\end{aligned}$$

Ricordando (1), si conclude che

$$\int_{P\times[0,1]} \frac{z}{x+y}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = \frac{4\ln 2}{3}.$$

Esercizio 2

Osserviamo che E è un'ellisse con semiassi di lunghezza 1 e $\sqrt{2}$, per cui già sappiamo che $\mathcal{H}^2(E) = \pi\sqrt{2}$. Peraltro questa modalità di calcolare $\mathcal{H}^2(E)$ non è valida al fine dell'esame, poiché non rispetta la consegna di far uso del teorema di Stokes.

Veniamo dunque ad una risoluzione coerente con la consegna. Poiché la proiezione ortogonale di ∂E nel piano xy è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, una parametrizzazione di ∂E è evidentemente data da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

e quindi (se τ è l'orientazione indotta da γ, per cui $\tau(\gamma(t)) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$) si ha

$$\int_{(\partial E,\tau)} (z, x, y) = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t)\, dt = 2\pi.$$

Per poter applicare il teorema di Stokes serve dapprima osservare che il campo N normale ad E, compatibile con l'orientazione τ scelta precedentemente, è dato da $N(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Inoltre, come si calcola molto facilmente, si ha $\operatorname{rot}(z, x, y) = (1, 1, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Allora, per la formula di Stokes e per il risultato trovato sopra, si ha

$$\begin{aligned}
2\pi &= \int_{(\partial E,\tau)} (z, x, y) = \int_{(E,N)} \operatorname{rot}(z, x, y) \\
&= \int_E (1, 1, 1) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\mathcal{H}^2 = \int_E \sqrt{2}\, d\mathcal{H}^2 \\
&= \sqrt{2}\, \mathcal{H}^2(E)
\end{aligned}$$

da cui $\mathcal{H}^2(E) = \pi\sqrt{2}$.

Esercizio 3

Sia

$$g(x) := f(x) - \left(\frac{2}{\pi} - 3\right)\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

e osserviamo che g è 2π-periodica e $g|_{(-\pi,\pi)}$ è dispari. Siano a_n, b_n i coefficienti di Fourier di f e α_n, β_n quelli di g, cioè

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt \qquad (n \geq 0)$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt \qquad (n \geq 1).$$

Per la disparità di f e g, si ha

$$a_n = \alpha_n = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Inoltre

$$b_1 = \beta_1 + \frac{2}{\pi} - 3 \tag{2}$$

e

$$b_n = \beta_n, \text{ se } n \geq 2. \tag{3}$$

Calcoliamo ora β_n per $n \geq 1$:

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \max\{\pi/2, t\}\sin(nt)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin(nt)\,dt$$

dove (teorema fondamentale del calcolo)

$$\int_0^{\pi/2} \sin(nt)\,dt = \left(\frac{\cos(nt)}{n}\right)_{t=\pi/2}^{t=0} = \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$$

e (integrazione per parti, teorema fondamentale del calcolo)

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin(nt)\,dt &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{t\cos(nt)}{n}\right)_{t=\pi}^{t=\pi/2} + \frac{2}{\pi n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{\cos(n\pi/2)}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n}\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)_{t=\pi/2}^{t=\pi} \\ &= \frac{\cos(n\pi/2)}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n - \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\beta_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n - \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n^2} \qquad (n \geq 1).$$

In particolare, per (2), si ha

$$b_1 = 3 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - 3 = 0.$$

mentre, per $n \geq 2$, da (3) si ottiene

$$b_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n - \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n^2}$$

e cioè:

$$b_{2k} = -\frac{1}{2k} \qquad (k \geq 1)$$

e

$$b_{2k+1} = \frac{3}{2k+1} + \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^2} \qquad (k \geq 1).$$

Veniamo a descrivere le proprietà di convergenza. Poiché $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Osserviamo poi che la funzione f è regolare a tratti ed è continua eccetto che:

- nei punti dell'insieme $D_0 := \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ dove il limite destro e il limite sinistro valgono rispettivamente $\pi/2$ e $-\pi/2$;
- nei punti dell'insieme $D_1 := \{(2k+1)\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ dove il limite destro e il limite sinistro valgono rispettivamente $-\pi$ e π;

Allora, indicando con S la somma della serie di Fourier e posto $D := D_0 \cup D_1$, si ha intanto

$$S|_{\mathbb{Z}\setminus D} = f|_{\mathbb{Z}\setminus D}, \quad S|_D = 0.$$

Inoltre la serie di Fourier di f converge uniformemente a f negli insiemi del tipo

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi - \varepsilon, k\pi + \varepsilon)$$

con $\varepsilon \in (0,\pi)$.