Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 10 settembre 2020

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1. Sia D la regione limitata del piano yz racchiusa dalle curve $y = 3$ e $y = 4z - z^2$. Rappresentare graficamente il solido E ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme $\{0\} \times D$. Calcolare

$$\int_{\partial E} \frac{x^2 + y^2 - 9}{\sqrt{1 + (4 - 2z)^2}} \, dH^2(x, y, z).$$

Risoluzione. Sia P l'arco di parabola $y = 4z - z^2$ con $z \in [1, 3]$ e sia S_1 la superficie ottenuta da una rotazione completa di $\{0\} \times P$ intorno all'asse z. Sia Q il segmento della retta $y = 3$ con $z \in [1, 3]$ e sia S_2 la superficie ottenuta da una rotazione completa di $\{0\} \times Q$ intorno all'asse z. Allora

$$\partial D = A \cup B, \quad \partial E = S_1 \cup S_2.$$

Osserviamo che:

- S_1 è una superficie regolare e una sua parametrizzazione è data da

  $$\varphi(z, \theta) := (r(z) \cos \theta, r(z) \sin \theta, z), \quad (z, \theta) \in R$$

  dove $r(z) := 4z - z^2$ e $R := [1, 3] \times [0, 2\pi]$. Si trova facilmente che

  $$D_1\varphi(z, \theta) \times D_2\varphi(z, \theta) = (-r(z) \cos \theta, -r(z) \sin \theta, r(z)r'(z))$$

  e quindi

  $$J\varphi(z, \theta) = \|D_1\varphi(z, \theta) \times D_2\varphi(z, \theta)\| = r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}$$

  per ogni $(z, \theta) \in (1, 3) \times (0, 2\pi)$. Quindi, per la formula dell'area, si ha

  $$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{S_1 = \varphi(R)} \frac{x^2 + y^2 - 9}{\sqrt{1 + (4 - 2z)^2}} \, dH^2(x, y, z) \\ &= \int_R \frac{r(z)^2 - 9}{\sqrt{1 + (4 - 2z)^2}} r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2} \, dL^2(z, \theta) \\ &= \int_R (r(z)^2 - 9)r(z) \, dL^2(z, \theta) \\ &= \int_R (-z^6 + 12z^5 - 48z^4 + 64z^3 + 9z^2 - 36z) \, dL^2(z, \theta). \end{aligned}$$

Dal teorema di Fubini si ottiene infine

$$I_1 = 2\pi \int_1^3 (-z^6 + 12z^5 - 48z^4 + 64z^3 + 9z^2 - 36z)\, dz = \frac{2416\pi}{35}.$$

- S_2 è un sottoinsieme del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 9$, per cui

$$I_2 := \int_{S_2} \frac{x^2 + y^2 - 9}{\sqrt{1 + (4 - 2z)^2}}\, dH^2(x, y, z) = 0.$$

Pertanto

$$\int_{\partial E} \frac{x^2 + y^2 - 9}{\sqrt{1 + (4 - 2z)^2}}\, dH^2(x, y, z) = I_1 + I_2 = \frac{2416\pi}{35}.$$

Esercizio 2. Si considerino:

- La superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 \leq 1,\ y = x^2\}$;
- Il campo N normale a S tale che $N_2 > 0$;
- Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $F(x,y,z) := (z^2, x/2, y + z^2)$.

Usare il teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F.$$

Risoluzione. Osserviamo che

$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = 1,\ y = x^2\}.$$

Quindi $\partial(S,N)$ è parametrizzata da

$$\gamma(t) := (\cos t, \cos^2 t, \sin t), \quad t \in [2\pi, 0].$$

Pertanto, dal teorema di Stokes, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F &= \int_{\partial(S,N)} F = \int_{2\pi}^{0} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_{2\pi}^{0} \left(\sin^2 t, \frac{1}{2}\cos t, \cos^2 t + \sin^2 t\right) \cdot (-\sin t, -2\cos t \sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_{2\pi}^{0} (-\sin^3 t - \cos^2 t \sin t + \cos t)\, dt = \int_{2\pi}^{0} (-\sin t + \cos t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

- Rappresentare il grafico di f;
- Calcolare a_0 e b_1;
- Descrivere la convergenza della serie di Fourier di f;
- Dare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.

Risoluzione. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\, dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Inoltre, dalla formula di integrazione per parti e dal teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-t \sin t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) \sin t\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (t D(\cos t))\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) (D(\cos t))\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(t \cos t)_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \cos t\, dt \right] - \frac{1}{\pi} \left[((t + \pi/2) \cos t)_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \cos t\, dt \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Infine:

(i) Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f converge a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ (e quindi anche puntualmente quasi ovunque, per il teorema di Lusin-Carleson).

(ii) La funzione f è regolare a tratti e quindi la sua serie di Fourier in x converge a

- $f(x)$ se x non è un multiplo di π;
- $\pi/4$ se x è un multiplo pari di π;
- $5\pi/4$ se x è un multiplo dispari di π.

(iii) La serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso in cui f è continua (per esempio in $[\pi/4, 3\pi/4]$).