Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

26 luglio 2021 - II appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E il solido ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse z della seguente regione:

$$R := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (y-1)^2 + z^2 \le 1, y \le 1, z \ge 0\} \cup (\{0\} \times [1, 2] \times [0, 1]).$$

- Rappresentare graficamente E;
- Calcolare
$$I := \int_{(\partial E, \nu)} (-y, x, z(1-z))$$
dove ν è il campo normale a ∂E uscente.

Risoluzione. La frontiera di R è l'unione delle seguenti quattro curve regolari:

- L'arco di circonferenza $C_1 := \{(0, y, z) | (y-1)^2 + z^2 = 1, y \le 1, z \ge 0\}$;
- Il segmento $C_2 := \{0\} \times [1, 2] \times \{1\}$;
- Il segmento $C_3 := \{0\} \times \{2\} \times [0, 1]$;
- Il segmento $C_4 := \{0\} \times [0, 2] \times \{0\}$.

Allora, indicata con S_i la superficie regolare ottenuta da una rotazione completa di C_i intorno all'asse z ($i = 1, 2, 3, 4$), si ha

$$\partial E = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

Naturalmente si ha

$$\int_{S_2} (-y, x, z(1-z)) \cdot \underbrace{\nu(x, y, z)}_{=(0,0,1)} \, dH^2 = \int_{S_2} z(1-z) \, dH^2 = 0,$$

$$\int_{S_4} (-y, x, z(1-z)) \cdot \underbrace{\nu(x, y, z)}_{=(0,0,-1)} \, dH^2 = \int_{S_4} -z(1-z) \, dH^2 = 0$$

e

$$\int_{S_3} (-y, x, z(1-z)) \cdot \underbrace{\nu(x,y,z)}_{=(x,y,0)/2} \, dH^2 = \frac{1}{2} \int_{S_2} -xy + xy \, dH^2 = 0.$$

Quindi

$$I = \int_{S_1} (-y, x, z(1-z)) \cdot \nu(x,y,z) \, dH^2.$$

Per calcolare I serve allora una $(2,3)$-parametrizzazione di S_1. Per ricavarla, consideriamo un punto $(x,y,z) \in S_1$ e siano (ρ, θ) le coordinate polari di (x,y), cioè

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta.$$

Allora z si può ricavare dall'equazione

$$(\rho - 1)^2 + z^2 = 1.$$

Si ottiene

$$z = \sqrt{1 - (\rho-1)^2} = \sqrt{2\rho - \rho^2}.$$

La $(2,3)$-parametrizzazione di S_1 così individuata è

$$\varphi(\rho, \theta) := \left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{2\rho - \rho^2}\right), \quad (\rho,\theta) \in C := [0,1] \times [0, 2\pi].$$

Svolgendo semplici calcoli si trova rapidamente che

$$D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta) = \left(\frac{(\rho-1)\rho\cos\theta}{\sqrt{2\rho-\rho^2}}, \frac{(\rho-1)\rho\sin\theta}{\sqrt{2\rho-\rho^2}}, \rho \right)$$

e quindi (osservando che la terza componente di $\nu|_{S_1}$ è positiva)

$$\nu(\varphi(\rho,\theta)) = \nu_\varphi(\rho,\theta) = \frac{D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta)}{|D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta)|} = \frac{D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta)}{J\varphi(\rho,\theta)}$$

per ogni $(\rho,\theta) \in (0,1) \times (0, 2\pi)$. Dalla formula dell'area otteniamo finalmente

$$\begin{aligned}
I &= \int_{S_1 = \varphi(C)} (-y, x, z(1-z)) \cdot \nu(x,y,z) \, dH^2 \\
&= \int_C \left(-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, \sqrt{2\rho-\rho^2}(1 - \sqrt{2\rho-\rho^2}) \right) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \left(\frac{(\rho-1)\rho\cos\theta}{\sqrt{2\rho-\rho^2}}, \frac{(\rho-1)\rho\sin\theta}{\sqrt{2\rho-\rho^2}}, \rho \right) dL^2 \\
&= \int_{C=[0,1]\times[0,2\pi]} (\rho\sqrt{2\rho-\rho^2} - 2\rho^2 + \rho^3) \, dL^2.
\end{aligned}$$

Per il teorema di Fubini, il teorema di compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann e il teorema fondamentale del calcolo, si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2\pi]} (\rho\sqrt{2\rho - \rho^2} - 2\rho^2 + \rho^3) \, dL^1(\theta) \right) dL^1(\rho) \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho\sqrt{2\rho - \rho^2} - 2\rho^2 + \rho^3) \, d\rho \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1 - (\rho - 1)^2} \, d\rho - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

da cui, cambiando la variabile nell'integrale ($1 - \rho = \cos t$, con $t \in [0, \pi/2]$) e usando ancora una volta il teorema fondamentale del calcolo, si conclude

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos t) \sin^2 t \, dt - \frac{5}{12} \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^2 t D \sin t \, dt - \frac{5}{12} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\sin^3 t}{3} \right)_{t=0}^{t=\pi/2} - \frac{5}{12} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \right) \end{aligned}$$

cioè

$$I = \frac{\pi(\pi - 3)}{2}.$$

2. Calcolare l'integrale dell'esercizio 1, usando il teorema di Gauss della divergenza.

Risoluzione. Per il teorema della divergenza si ha

$$I = \int_{(\partial E,\nu)} (-y, x, z(1-z)) = \int_E \mathrm{div}(-y, x, z(1-z))\, dL^3 = \int_E (1-2z)\, dL^3.$$

Quindi, per il teorema di Fubini (sezioni piane parallele al piano xy) e per la compatibilità misura-integrale,

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]} \left(\int_{E_z} (1-2z)\, dL^2(x,y) \right) dL^1(z) \\ &= \int_{[0,1]} (1-2z) L^2(E_z)\, dL^1(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Osserviamo ora che (per ogni $z \in [0,1]$) E_z è la corona circolare centrata in $(0,0)$ avente come raggio inferiore e raggio superiore, rispettivamente, i numeri $1 - \sqrt{1-z^2}$ e 2. Pertanto

$$L^2(E_z) = 4\pi - \left(1 - \sqrt{1-z^2}\right)^2 \pi = \pi \left(2 + z^2 + 2\sqrt{1-z^2}\right). \tag{2}$$

Da (1), (2) e dal teorema di compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo

$$I = \pi \int_0^1 (1-2z) \left(2 + z^2 + 2\sqrt{1-z^2}\right) dz.$$

Cambiando la variabile ($z = \sin t$, con $t \in [0, \pi/2]$), segue

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin t) \left(2 + \sin^2 t + 2\cos t\right) \cos t\, dt.$$

A questo punto il calcolo standard porta a concludere che

$$I = \frac{\pi(\pi - 3)}{2}.$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \sin \frac{x}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Risoluzione.

Convergenza puntuale. Posto

$$a_n(x) := \left(n \sin \frac{x}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

si ha (per ogni $x \neq 0$)

$$|a_n(x)|^{1/n} = n \sin \frac{|x|}{n} = |x| \frac{\sin(|x|/n)}{|x|/n}$$

da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n(x)|^{1/n} = |x|, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, indicato con D l'insieme di convergenza, si ha

$$(-1, 1) \subset D \subset [-1, 1].$$

Per capire se 1 appartiene o meno a D, calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} a_n(1)$. A tal fine osserviamo che

$$a_n(1) = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + n \sin \frac{1}{n} - 1\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n}\right]^{\frac{n}{\beta_n}}$$

dove

$$\beta_n := \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right)^{-1}.$$

Osserviamo che:

- Si ha $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = e.$$

- Vale

$$\frac{n}{\beta_n} = n^2 \sin \frac{1}{n} - n = \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}},$$

  da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\beta_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$

Si ottiene così

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(1) = 1 \tag{3}$$

da cui segue

$$1 \notin D.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n(-1)| = \lim_{n\to+\infty} a_n(1) = 1$$

e quindi

$$-1 \notin D.$$

Se ne conclude che

$$D = (-1, 1).$$

<u>Convergenza totale.</u>

- Primo tentativo: in $(C_b((-1,1)), \|\cdot\|_{\infty,(-1,1)})$: Si ha

$$\begin{aligned}\|a_n\|_{\infty,(-1,1)} &= \sup_{x\in(-1,1)} \left|\left(n\sin\frac{x}{n}\right)^n\right| = \sup_{x\in[0,1)} \left(n\sin\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \max_{x\in[0,1]} \left(n\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

  e cioè

$$\|a_n\|_{\infty,(-1,1)} = a_n(1).$$

  Da questa e da (3) segue che la serie data non converge totalmente in $(C_b((-1,1)), \|\cdot\|_{\infty,(-1,1)})$.

- Secondo tentativo: in $(C([-a,a]), \|\cdot\|_{\infty,[-a,a]})$, con $a \in (0,1)$: Si ha

$$\|a_n\|_{\infty,[-a,a]} = \max_{x\in[-a,a]} \left|\left(n\sin\frac{x}{n}\right)^n\right| = \max_{x\in[0,a]} \left(n\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(n\sin\frac{a}{n}\right)^n$$

  e cioè

$$\|a_n\|_{\infty,[-a,a]} = a_n(a).$$

  Allora, poichè $a \in D$, la serie data converge totalmente in $(C([-a,a]), \|\cdot\|_{\infty,[-a,a]})$.

<u>Convergenza uniforme (della successione delle somme parziali).</u> Dalla convergenza totale in $(C([-a,a]), \|\cdot\|_{\infty,[-a,a]})$ segue subito la convergenza uniforme in $[-a,a]$ (con $a \in (0,1)$). Rimane da chiarire se la serie converga uniformemente negli insiemi $(-1,1)$, $[a,1)$, $(-1,a]$ (con $a \in (-1,1)$). Verifichiamo che la serie non converge uniformemente in $[a,1)$. Supponiamo per assurdo che la serie converga uniformemente in $[a,1)$ e indichiamo con S e S_n, rispettivamente, la

somma e la somma parziale n-esima. Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esisterebbe allora $N_\varepsilon > 0$ tale che

$$\sup_{x\in[a,1)} |S(x) - S_n(x)| \le \varepsilon, \text{ per ogni } n \ge N_\varepsilon.$$

Ne seguirebbe

$$|a_{n+1}(x)| = |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \le |S_{n+1}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| \le 2\varepsilon$$

per ogni $x \in [a, 1)$ e per ogni $n \ge N_\varepsilon$. Se ne concluderebbe che

$$2\varepsilon \ge \sup_{x\in[a,1)} |a_{n+1}(x)| = \max_{x\in[a,1]} |a_{n+1}(x)| = a_{n+1}(1)$$

per ogni $n \ge N_\varepsilon$, che contraddice (3). Dobbiamo quindi ammettere che la serie non converge uniformemente in $[a, 1)$. Analogamente si prova che la serie non converge uniformemente in $(-1, a]$ e in $(-1, 1)$.