Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

10 gennaio 2022 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \,|\, 3 - 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2),\, 0 \leq y \leq x\}$$

e calcolare

$$\int_E \frac{z(x^2 + y^2)}{(3 - z)^2}\, dL^3(x, y, z).$$

Risoluzione. Dal teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali) si ottiene

$$\begin{aligned}
I := & \int_E \frac{z(x^2 + y^2)}{(3 - z)^2}\, dL^3(x, y, z) \\
= & \int_0^3 \left(\int_{E_z} \frac{z(x^2 + y^2)}{(3 - z)^2}\, dL^2(x, y) \right) dz \qquad (1) \\
= & \int_0^3 \frac{z}{(3 - z)^2} \left(\int_{E_z} (x^2 + y^2)\, dL^2(x, y) \right) dz
\end{aligned}$$

dove

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (3 - z)/2 \leq x^2 + y^2 \leq 3 - z,\, 0 \leq y \leq x\}.$$

Osserviamo che E_z è un settore di corona circolare e quindi è naturale considerare la $(2, 2)$-parametrizzazione regolare di E_z (cambio di variabili da cartesiane a polari)

$$\varphi : C_z \to E_z, \quad \varphi(\theta, \rho) := (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta).$$

dove $C_z := [0, \pi/4] \times [((3 - z)/2)^{1/2}, (3 - z)^{1/2}]$. Dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini segue

$$\begin{aligned}
\int_{E_z = \varphi(C_z)} (x^2 + y^2)\, dL^2(x, y) &= \int_{C_z} \rho^3\, dL^2(\theta, \rho) \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_{((3-z)/2)^{1/2}}^{(3-z)^{1/2}} \rho^3\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{16} \left((3 - z)^2 - \frac{(3 - z)^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

e cioè

(2) $$\int_{E_z} (x^2 + y^2)\, dL^2(x, y) = \frac{3\pi}{64}(3 - z)^2.$$

Sostituendo (2) in (1) concludiamo che

$$I = \frac{3\pi}{64} \int_0^3 z\, dz = \frac{27\pi}{128}.$$

2. Si considerino l'insieme

$$L := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{(z+1)^2} + y^2 = 1,\ z \in [0,3] \right\}$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) := (-y, x, xyz).$$

- Dare una rappresentazione grafica di L e di ∂L;
- Scrivere una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di L;
- Calcolare $\operatorname{rot} F$;
- Usare la formula di Stokes per calcolare $\int_{\partial(L,\nu)} F$, dove ν è il campo normale a L continuo e tale che $\nu \cdot (0,0,1) \leq 0$.

Risoluzione. Osserviamo che la curva di livello $t \in [0,3]$ è l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(t+1)^2} + y^2 = 1.$$

Quindi una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di L è data da

$$\varphi(\theta, t) := ((t+1)\cos\theta, \sin\theta, t), \quad (\theta, t) \in C := [0, 2\pi] \times [0,3].$$

Dal calcolo diretto si ottiene facilmente

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (xz, -yz, 2)$$

e

$$D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t) = (\cos\theta, (t+1)\sin\theta, -\cos^2\theta).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\nu_\varphi(\theta,t) \cdot (0,0,1) &= \frac{D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)}{\|D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)\|} \cdot (0,0,1) \\
&= \frac{-\cos^2\theta}{\|D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)\|} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

per cui si ha $\nu \circ \varphi = \nu_\varphi$. Quindi, per le formule di Stokes e dell'area,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial(L,\nu)} F &= \int_{L=\varphi(C)} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_C (\operatorname{rot} F)(\varphi(\theta,t)) \cdot \nu(\varphi(\theta,t)) \, J\varphi(\theta,t) \, dL^2 \\
&= \int_C (\operatorname{rot} F)(\varphi(\theta,t)) \cdot \frac{D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)}{\|D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)\|} J\varphi(\theta,t) \, dL^2(\theta,t) \\
&= \int_C (\operatorname{rot} F)(\varphi(\theta,t)) \cdot (D_1\varphi(\theta,t) \times D_2\varphi(\theta,t)) \, dL^2(\theta,t) \\
&= \int_C (t(t+1)\cos\theta, -t\sin\theta, 2) \cdot (\cos\theta, (t+1)\sin\theta, -\cos^2\theta) \, dL^2(\theta,t) \\
&= \int_C t(t+1)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\cos^2\theta \, dL^2(\theta,t).
\end{aligned}$$

Dal teorema di Fubini segue infine

$$\begin{aligned}
\int_{\partial(L,\nu)} F &= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} t(t+1)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\cos^2\theta \, d\theta \right) dt \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} -2\cos^2\theta \, d\theta \right) dt \\
&= -6\pi.
\end{aligned}$$

3. Descrivere le proprietà di convergenza della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n .$$

Risoluzione. Osserviamo prima di tutto che la serie assegnata è una serie di potenze "mascherata" e più precisamente si ottiene ponendo $y = \frac{x}{x-1}$ nella serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} y^n = y + 2y^2 + \frac{1}{3}y^3 + 4y^4 + \frac{1}{5}y^5 + 6y^6 + \cdots \tag{3}$$

Allora:

- Convergenza puntuale. Poiché

$$\limsup_{n\to+\infty} (n^{(-1)^n})^{1/n} = 1,$$

il raggio di convergenza di (3) è 1. Inoltre, per $y = \pm 1$ la successione degli addendi di (3) non è infinitesima e quindi l'insieme in cui (3) converge puntualmente è $(-1, 1)$. Allora, indicato con D l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata, si ha che $x \in D$ se e solo se

$$-1 < \frac{x}{x-1} < 1$$

da cui si ricava facilmente $D = (-\infty, 1/2)$.

- Convergenza uniforme. Poiché non siamo in grado di calcolare la somma della serie assegnata, non siamo nemmeno in grado di descrivere compiutamente la convergenza uniforme della stessa. Per esempio, non sappiamo stabilire facilmente se la serie converga uniformemente in D. Informazioni parziali sulla convergenza uniforme verranno dallo studio della convergenza totale.

- Convergenza totale. Ricordiamo che vale la seguente proprietà, che segue da un risultato dimostrato nel corso: Se $0 < r < 1$ allora la serie (3) converge totalmente in $(C([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$. Ora, come è facile verificare, si ha $-r < \frac{x}{x-1} < r$ (con $0 < r < 1$) se e solo se $a(r) := \frac{r}{r-1} < x < \frac{r}{r+1} =: b(r)$. Quindi, per ogni $r \in (0, 1)$, la serie assegnata converge totalmente in $(C([a(r), b(r)]), \|\cdot\|_{\infty,[a(r),b(r)]})$. Da questo e osservando che

$$\lim_{r\to1-} a(r) = -\infty, \qquad \lim_{r\to1-} b(r) = \frac{1}{2},$$

otteniamo anche la convergenza totale in $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$ per ogni intervallo $[a, b]$ tale che $-\infty < a < b < 1/2$. In particolare la serie data converge uniformemente in tali intervalli.