Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

7 febbraio 2022 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E l'insieme dei punti $(x,y) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ delimitato dalle curve

$$y = -x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 4x, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

Rappresentare graficamente E e calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{1}{x+y}\, dL^2(x,y).$$

Risoluzione. Osserviamo che per ogni $(x,y) \in E$ esiste uno e un solo $(s,t) \in C := [2,4] \times [0,2]$ tale che

$$\begin{cases} y = -x^2 + sx \\ y = x^2 - tx \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} x^2 - tx = -x^2 + sx \\ y = x^2 - tx \end{cases}$$

che (essendo $x > 0$) equivale a

$$\begin{cases} x - t = -x + s \\ y = x^2 - tx \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = \left(\frac{s+t}{2}\right)^2 - \frac{t(s+t)}{2} = \frac{s^2-t^2}{4}. \end{cases}$$

Pertanto, l'insieme E è l'immagine della mappa $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(s,t) := \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s^2-t^2}{4}\right)$$

e che si verifica facilmente essere una $(2,2)$-parametrizzazione il cui fattore di trasformazione soddisfa

$$J\varphi(s,t) = \left|\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ s/2 & -t/2 \end{pmatrix}\right| = \frac{s+t}{4}$$

per ogni $(s,t) \in A := (2,4) \times (0,2)$. Dalla formula dell'area otteniamo allora

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{E=\varphi(C)} \frac{1}{x+y}\, dL^2(x,y) \\
&= \int_A \frac{1}{\frac{s+t}{2} + \frac{s^2-t^2}{4}} \cdot \frac{s+t}{4}\, dL^2(s,t) \\
&= \int_A \frac{1}{2+s-t}\, dL^2(s,t).
\end{aligned}$$

e infine dal teorema di Fubini

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^4 \left(\int_0^2 \frac{1}{2+s-t}\, dt \right) ds \\
&= \int_2^4 [\ln(2+s-t)]_{t=2}^{t=0}\, ds \\
&= \int_2^4 \ln \frac{2+s}{s}\, ds \\
&= \left[s \ln \frac{2+s}{s} \right]_{s=2}^{s=4} + 2 \int_2^4 \frac{1}{2+s} ds \\
&= 4 \ln \frac{3}{2} - 2 \ln 2 + 2 \ln \frac{3}{2} \\
&= 2 \ln \frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

2. Si consideri l'insieme

$$E := ([-1,1] \times [-1,1]) \cup ([1,2] \times [0,2])$$

e il campo vettoriale $F : E \to \mathbb{R}^2$ definito come segue

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) := ((x^2-1)(y^2-1)xy, (x^2-1)(y^2-1)y^2).$$

Calcolare $\operatorname{div} F$ e usare l'identità di Gauss 2D per calcolare anche $\int_E \operatorname{div} F \, dL^2$.

Risoluzione. Si ha

$$\operatorname{div} F(x,y) = (y^2-1)y(3x^2-1) + (x^2-1)(4y^3-2y).$$

Allora, per l'identità di Gauss 2D, si ha

$$\int_E (y^2-1)y(3x^2-1) + (x^2-1)(4y^3-2y) \, dL^2(x,y) = \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^1$$

dove N è il campo normale uscente a ∂E. Osserviamo che ∂E è una curva regolare a tratti composta di otto tratti regolari. Consideriamo la seguente coppia di tratti regolari di ∂E:

$$T_1 := \{2\} \times [0,2], \quad T_2 := [1,2] \times \{2\}.$$

Allora è facile verificare che F si annulla su $\partial E \setminus (T_1 \cup T_2)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} F \cdot N \, dH^1 &= \int_{T_1} F \cdot N \, dH^1 + \int_{T_2} F \cdot N \, dH^1 \\
&= \int_{T_1} (F_1, F_2) \cdot (1,0) \, dH^1 + \int_{T_2} (F_1, F_2) \cdot (0,1) \, dH^1 \\
&= \int_{T_1} F_1 \, dH^1 + \int_{T_2} F_2 \, dH^1.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora la $(1,2)$-parametrizzazione regolare di T_1

$$\alpha(t) := (2,t), \quad t \in [0,2]$$

e la $(1,2)$-parametrizzazione regolare di T_2

$$\beta(t) := (t,2), \quad t \in [1,2].$$

Allora, per la formula dell'area, si ha

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_1=\alpha([0,2])} F_1 \, dH^1 + \int_{T_2=\beta([1,2])} F_2 \, dH^1 \\
&\qquad = \int_0^2 F_1(\alpha(t))|\alpha'(t)| \, dt + \int_1^2 F_2(\beta(t))|\beta'(t)| \, dt \\
&\qquad = \int_0^2 F_1(2,t) \, dt + \int_1^2 F_2(t,2) \, dt \\
&\qquad = \int_0^2 6t(t^2-1) \, dt + \int_1^2 12(t^2-1) \, dt \\
&\qquad = \left[\frac{3t^4}{2} - 3t^2\right]_0^2 + \left[4t^3 - 12t\right]_1^2 \\
&\qquad = 28.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\int_E (y^2-1)y(3x^2-1) + (x^2-1)(4y^3-2y) \, dL^2(x,y) = 28.
$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica, pari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Rappresentare il grafico di f;
- Calcolare a_0, a_1 e b_n (per ogni n);
- Descrivere la convergenza della serie di Fourier di f;
- Dare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di f non converge uniformemente a f.

Risoluzione. Poiché f è pari, si ha $b_n = 0$ (per ogni $n \geq 1$). Usando la definizione di a_n e cambiando la variabile nell'integrale ($s = t - \frac{\pi}{2}$), si ottiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^\pi \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2 dt \right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s^2 ds \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Usando anche la formula di integrazione per parti, otteniamo poi

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt + \int_{\pi/2}^\pi \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos t \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s^2 \sin s \, ds \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} s^2 \sin s \, ds &= [-s^2 \cos s]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2s \cos s \, ds \\ &= [2s \sin s]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \sin s \, ds \\ &= \pi + [2 \cos s]_0^{\pi/2} \\ &= \pi - 2, \end{aligned}$$

per cui si ha

$$a_1 = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(\pi - 2) = \frac{6}{\pi} - 2.$$

Veniamo a descrivere la convergenza.

- Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \| \cdot \|_2)$. Inoltre, per il teorema di Carleson, tale serie converge a f puntualmente quasi ovunque.

- Osserviamo che f è regolare a tratti con $D = \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ e $E = \{-\pi, \pm\frac{\pi}{2}\}$. Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e la sua somma in x è uguale a $f(x)$ se $x \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$, mentre è uguale a $\frac{1}{2}$ se $x \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$.

- La serie di Fourier di f converge uniformemente a f negli insiemi del tipo (quale che sia $\varepsilon > 0$)

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[0, \frac{\pi}{2} + k\pi - \varepsilon\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon, \pi\right] \right).$$

- Ricordando che la convergenza uniforme "trasmette la continuità al limite", possiamo dire che la serie di Fourier di f non converge uniformemente in $[0, \pi]$ (per esempio).