Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

8 settembre 2021 - III appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme piano

$$B := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \mid -\pi \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq |\theta|\}.$$

e calcolarne l'area. Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z^2)$ attraverso la superficie $\partial B \times [0, 1]$ orientata a piacere. Infine, scrivere una parametrizzazione di $\partial B \times [0, 1]$.

Risoluzione. Sia $A := \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < \theta < \pi,\ 0 < \rho < |\theta|\}$, $C := \overline{A}$ e consideriamo la $(2, 2)$-parametrizzazione regolare

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta, \rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Allora $B = \varphi(C)$ e quindi, dal teorema dell'area e dal teorema di Fubini, si ottiene

$$L^2(B) = \int_{B=\varphi(C)} 1\, dL^2 = \int_C \rho\, dL^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{|\theta|} \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta^2}{2} d\theta$$

e cioè

$$L^2(B) = \frac{\pi^3}{3}.$$

Poniamo ora

$$E := B \times [0, 1], \quad L := \partial B \times [0, 1], \quad B_0 := B \times \{0\}, \quad B_1 := B \times \{1\}$$

e osserviamo che

$$\partial E = L \cup B_0 \cup B_1.$$

Indicato con N il campo normale "esterno" a ∂E, il teorema della divergenza implica

$$\begin{aligned}\int_L (x, -y, z^2) \cdot N(x, y, z) dH^2 + \int_{B_0} (x, -y, z^2) \cdot \underbrace{N(x, y, z)}_{=(0,0,-1)} dH^2& \\ + \int_{B_1} (x, -y, z^2) \cdot \underbrace{N(x, y, z)}_{=(0,0,1)} dH^2& \\ = \int_E 2z\, dL^3.&\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_L (x,-y,z^2)\cdot N(x,y,z)dH^2 &= \int_E 2z\,dL^3 + \int_{B_0} \underbrace{z^2}_{=0} dH^2 - \int_{B_1} \underbrace{z^2}_{=1} dH^2 \\ &= \int_E 2z\,dL^3 - \underbrace{H^2(B_1)}_{=L^2(B)=\pi^3/3} .\end{aligned}$$

Inoltre, per il teorema di Fubini, si ha

$$\int_E 2z\,dL^3 = \int_B \left(\int_0^1 2z\,dz\right) dL^2(x,y) = \int_B 1\,dL^2 = L^2(B) = \frac{\pi^3}{3}.$$

Pertanto

$$\int_L (x,-y,z^2)\cdot N(x,y,z)dH^2 = 0.$$

Infine, osserviamo che una parametrizzazione di L può essere definita come segue:

$$\psi : [-\pi,\pi]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\theta,t) := (|\theta|\cos\theta, |\theta|\sin\theta, t).$$

2. Si considerino i due cilindri C_1 e C_2 di equazioni, rispettivamente,

$$z = 1 - x^2, \quad y = (x-1)^2.$$

Rappresentare graficamente la curva $\Gamma := \{(x,y,z) \in C_1 \cap C_2 \,|\, x \in [0,2]\}$ e calcolare

$$\int_{(\Gamma,\tau)} (\ln(x^2+z), x, y+z)$$

dove τ è una qualsivoglia orientazione di Γ.

Risoluzione. Una parametrizzazione di Γ è data da

$$\gamma(t) := (t, (t-1)^2, 1-t^2), \quad t \in [0,2].$$

Sia τ l'orientazione di Γ corrispondente a γ, cioè quella per cui si ha

$$\gamma'(t) = |\gamma'(t)|\, \tau(\gamma(t)), \quad t \in (0,2).$$

Allora, dalla formula dell'area e dal teorema di compatibilità fra gli integrali di Lebesgue e di Riemann, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{(\Gamma,\tau)} (\ln(x^2+z), x, y+z) &= \int_{\Gamma=\gamma([0,2])} (\ln(x^2+z), x, y+z) \cdot \tau(x,y,z)\, dH^1 \\
&= \int_{[0,2]} (\ln(t^2+1-t^2), t, (t-1)^2+1-t^2) \\
&\qquad \cdot (1, 2(t-1), -2t)\, dL^1 \\
&= \int_0^2 2t(t-1) - 2t(2-2t)\, dt \\
&= \int_0^2 (6t^2 - 6t)\, dt
\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_{(\Gamma,\tau)} (\ln(x^2+z), x, y+z) = 4.$$

3. Per ogni intero positivo k, sia $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che

$$f_k(t) = \frac{t^k}{\pi^k}, \text{ per ogni } t \in (-\pi, \pi].$$

Tracciare il grafico di f_k e di $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ (limite puntuale). Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f_k. Calcolare i coefficienti $a_n(f_2)$ e $b_n(f_2)$. Infine, provare che

$$\lim_{k\to\infty} a_n(f_k) = a_n(f) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_n(f_k) = b_n(f) = 0$$

per ogni $n \geq 1$.

Risoluzione. Osservazioni:

- Quale che sia k, la funzione f_k è regolare a tratti;
- Se k è pari, la funzione f_k è continua in $[-\pi, \pi)$;
- Se k è dispari, la funzione f_k ha un solo punto di discontinuità in $[-\pi, \pi)$ e questo è $-\pi$.

Quindi dalla teoria "classica" della serie di Fourier segue subito che:

- Se k è pari, la serie di Fourier di f_k converge uniformemente (in $\mathbb{R}$) a f_k;
- Se k è dispari, la serie di Fourier di f_k converge puntualmente alla funzione $S_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$S_k(t) := \begin{cases} f_k(t) = t^k/\pi^k & \text{se } t \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } t \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

  Inoltre essa converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$, con $-\pi < a < b < \pi$.

Poiché f_k è continua a tratti, si ha anche $f_k|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Quindi, dalla teoria L^2 della serie di Fourier segue che:

- La serie di Fourier di f_k converge incondizionatamente a f_k in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ (per ogni k);
- La serie di Fourier di f_k converge puntualmente q.o. a f_k (per ogni k). Tale risultato era già noto (e, anzi, meglio precisato) dalle conclusioni precedenti.

Osserviamo ora che f_2 è pari. Se $n \geq 1$ si ha quindi $b_n(f_2) = 0$ e (dopo un facile calcolo basato sulla formula di integrazione per parti)

$$a_n(f_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_2(x) \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi^3} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)dx = (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Inoltre

$$a_0(f_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_2(x) dx = \frac{2}{\pi^3} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Infine, osserviamo che le funzioni $t \mapsto f_k(t)\cos(nt)$ e $t \mapsto f_k(t)\sin(nt)$ sono banalmente dominate dalla funzione costante 1, nell'intervallo $(-\pi, \pi)$. Allora, per il teorema della convergenza dominata, si ottiene subito (se $n \geq 1$)

$$\lim_{k\to\infty} a_n(f_k) = a_n(f), \quad \lim_{k\to\infty} b_n(f_k) = b_n(f).$$

Essendo

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } t \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

si ha anche $a_n(f) = b_n(f) = 0$.