Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

7 febbraio 2022 - V appello

1. Sia E l'insieme dei punti $(x,y) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ delimitato dalle curve

$$y = -x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 4x, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

Rappresentare graficamente E e calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{1}{x+y}\, dL^2(x,y).$$

2. Si consideri l'insieme

$$E := ([-1,1] \times [-1,1]) \cup ([1,2] \times [0,2])$$

e il campo vettoriale $F : E \to \mathbb{R}^2$ definito come segue

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) := ((x^2-1)(y^2-1)xy, (x^2-1)(y^2-1)y^2).$$

Calcolare $\operatorname{div} F$ e usare l'identità di Gauss 2D per calcolare anche $\int_E \operatorname{div} F\, dL^2$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica, pari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Rappresentare il grafico di f;
- Calcolare a_0, a_1 e b_n (per ogni n);
- Descrivere la convergenza della serie di Fourier di f;
- Dare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di f non converge uniformemente a f.