Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

8 settembre 2021 - III appello

1. Rappresentare graficamente l'insieme piano

$$B := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \mid -\pi \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq |\theta|\}.$$

e calcolarne l'area. Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z^2)$ attraverso la superficie $\partial B \times [0, 1]$ orientata a piacere. Infine, scrivere una parametrizzazione di $\partial B \times [0, 1]$.

2. Si considerino i due cilindri C_1 e C_2 di equazioni, rispettivamente,

$$z = 1 - x^2, \quad y = (x - 1)^2.$$

Rappresentare graficamente la curva $\Gamma := \{(x, y, z) \in C_1 \cap C_2 \mid x \in [0, 2]\}$ e calcolare

$$\int_{(\Gamma,\tau)} (\ln(x^2 + z), x, y + z)$$

dove τ è una qualsivoglia orientazione di Γ.

3. Per ogni intero positivo k, sia $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che

$$f_k(t) = \frac{t^k}{\pi^k}, \text{ per ogni } t \in (-\pi, \pi].$$

Tracciare il grafico di f_k e di $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ (limite puntuale). Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f_k. Calcolare i coefficienti $a_n(f_2)$ e $b_n(f_2)$. Infine, provare che

$$\lim_{k\to\infty} a_n(f_k) = a_n(f) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_n(f_k) = b_n(f) = 0$$

per ogni $n \geq 1$.