Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2020/2021

9 giugno 2021 - I appello

1. Sia E l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$z = y\sqrt{3}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0.$$

Inoltre si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (0, x, 0), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Rappresentare graficamente E;
- Verificare la validità della formula di Stokes

  $$\int_{(E,\nu)} \operatorname{rot} F = \int_{(\partial E,\tau)} F$$

  scegliendo a piacere l'orientazione (fra le due possibili).

2. Sia E la regione piana costituita dai punti $(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ tali che

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq y \leq x + 1.$$

- Rappresentare graficamente l'insieme $E \times [0, 2]$;
- Calcolare l'integrale

  $$\int_{E\times[0,2]} (x + y)z \, dL^3(x, y, z).$$

3. Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2]$, sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\pi/2)^{1/2} & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ x\alpha^{-1/2}/2 & \text{se } x \in [0, 2\alpha] \\ (x - \alpha)^{1/2} & \text{se } x \in (2\alpha, \pi]. \end{cases}$$

Inoltre sia

$$f_0 := \lim_{\alpha\to 0+} f_\alpha \qquad \text{(limite puntuale).}$$

- Disegnare il grafico di f_α, per $\alpha \in [0, \pi/2]$;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f_α, al variare di $\alpha \in [0, \pi/2]$ (motivare le affermazioni);