# Raccolta di esercizi di ANALISI MATEMATICA per il Corso di Laurea in Matematica a.a. 2020/2021

Silvano Delladio

July 26, 2021

# Chapter 1

# Integrali multipli

## 1.1

Sia $B \subset \mathbb{R}^3$ la palla di raggio 2 centrata nell'origine e si consideri

$$E := \{(x, y, z) \in B \ \text{ tali che } \ z \geq 1\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_E z \, dxdydz.$$

[$9\pi/4$]

## 1.2

Sia $E$ il cono avente per base il disco unitario in $\mathbb{R}^2_{xy}$ centrato nell'origine e per vertice il punto $(0, 0, 1)$. Calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2) \, dxdydz.$$

## 1.3

Si consideri il cilindro

$$E := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$$

e si calcoli

$$\int_E \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz.$$

## 1.4

Calcolare

$$\int_E y\,dx\,dy\,dz$$

dove $E$ è il seguente cilindro con basi parallele al piano $\mathbb{R}^2_{xz}$:

$$E := \{(x,y,z) \mid x^2+z^2 \le 2,\ 0 \le y \le 1\}.$$

$[\pi]$

## 1.5

Calcolare il volume della regione compresa fra i piani coordinati e il piano di equazione $z+x+2y=2$.

## 1.6

Calcolare

$$\int_A xy\,dxdy$$

dove $A$ è il quadrilatero di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(2,1)$.

[7/12]

## 1.7

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{x^4}\,dxdy$$

dove $A$ è la regione limitata di piano racchiusa dalle le curve di equazione

$$y = x, \qquad y = 2x, \qquad y = x^2, \qquad y = 2x^2.$$

## 1.8

Si calcoli l'integrale

$$\int_A (x-1)^2 y\ dxdy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \leq 0\}.$$

## 1.9

Calcolare l'integrale

$$\int_A x^2 y \, dxdy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq -|x|\}.$$

## 1.10

Calcolare

$$\int_A x \ dxdydz,$$

dove

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$$

## 1.11

Calcolare l'area dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y \leq 3x,\ 1 \leq x + 3y \leq 3\}.$$

## 1.12

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2,\ \ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

## 1.13

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{\sqrt{x}} \, dxdy$$

dove

$$A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\;\; 1/x \leq y \leq 2/x,\;\; \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

[2/3]

## 1.14

Calcolare l'integrale

$$\int_{C\cup S} (x^2+y^2)\, dxdydz$$

dove

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1+\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq 2\}$$

e $S \subset \mathbf{R}^3$ è la sfera di raggio unitario centrata nel punto $(0,0,1)$.

## 1.15

Si consideri la seguente curva in $\mathbf{R}^3$

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; x=0,\; y>0,\; y^2-z^2=1\},$$

e sia $S$ la superficie ottenuta ruotando la curva $\gamma$ attorno all'asse $z$. Chiamiamo $E$ la regione semplicemente connessa dello spazio delimitata da $S$. Posto

$$A = \{(x,y,z) \in E \;:\; xy \geq 0,\; 0 \leq z \leq 1\},$$

si calcoli

$$\int_A \frac{1}{1+z^2}\; dxdydz.$$

[$\pi/2$]

## 1.16

Si consideri la funzione così definita:

$$f(x,y) := 1 - \frac{x^2}{4} - y^2, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Descrivere l'insieme

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, f(x,y) \geq 0\}$$

e calcolare il volume di

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y) \in \Omega,\; 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

## 1.17

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

## 1.18

Si consideri il cono

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq 1\}$$

e la palla $B$ di raggio uno centrata nell'origine. Calcolare il volume di $C \backslash B$.

## 1.19

Calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \frac{1}{1 + \frac{y}{2} - (x^2 + y^2)^{1/2}} dxdydz$$

dove $\Gamma$ è la regione limitata compresa fra il cono di equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e il piano di equazione

$$2z - y = 2.$$

## 1.20

Calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma (1 + \cos y)\, dxdydz$$

dove $\Gamma$ è la regione di spazio ottenuta facendo ruotare il sottografico della funzione

$$y \mapsto \sin y, \qquad y \in [0, \pi]$$

intorno all'asse $y$.

$\left[\pi^2/2\right]$

## 1.21

Siano $A$ e $B$, rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato in $(0,0)$ e il disco di raggio 1 centrato in $(1,0)$. Calcolare

$$\int_D xy + 1$$

dove $D := \{(x,y) \in A \backslash B \mid x \geq 0\}$.

$[\pi]$

## 1.22

Calcolare

$$\int_T x^2 \, dxdy$$

dove $T$ è il triangolo del piano di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

[1/4]

## 1.23

Sia $F$ la regione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse $y$ il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(0,-2,2)$ e $(0,1,2)$. Calcolare

$$\int_F xz \, dxdydz.$$

[0]

## 1.24

Calcolare il volume della regione finita di spazio compresa fra il cono di equazione $z = \sqrt{2(x^2+y^2)}$ e il piano di equazione $z = 1 + y$.

$[\pi\sqrt{2}/3]$

## 1.25

Siano $a, b, h$ numeri reali tali che
$$b \geq a > 0, \qquad h > 0.$$
Calcolare il volume della “botte ellissoidale”
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1,\ |z| \leq h \right\}$$
al variare di $h$.

$\left[\text{Per } h \leq b:\ \pi a^2 \left(2h - \frac{2h^3}{3b^2}\right); \quad \text{Per } h > b:\ \frac{4}{3}\pi a^2 b\right]$

## 1.26

Sia $E$ la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro
$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$
e i piani
$$z = 0, \qquad z = y.$$
Calcolare
$$\int_E (y - x)\, dxdydz.$$

$[5\pi/4]$

## 1.27

Calcolare
$$\int_E [(x - y^{1/2}) \ln y + 1]\, dxdy$$
dove
$$E := \{(x,y) \,|\, y \in [0,1],\ x \in [y^{1/2}, 1 + y^{1/2}]\}.$$

$[1/2]$

## 1.28

Calcolare

$$\int_E z\, dxdydz$$

dove

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ z \geq 0\}.$$

$[\pi/32]$

## 1.29

Calcolare

$$\int_E \ln(1 + x^2 + y^2)^z\, dxdydz$$

dove

$$E := \{(x,y,z) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

$\left[\pi\left(\frac{5}{2}\ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2}\right)\right]$

## 1.30

Calcolare il volume del solido ottenuto facendo compiere all'insieme

$$D := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \geq 0, \quad \sqrt{3}y \leq x, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

una rotazione completa intorno all'asse $x$.

$\left[\frac{7\pi}{12}\right]$

## 1.31

Posto

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq (1+xy)^{1/2}\right\}$$

provare che

$$\int_S (x+y)z\, dxdydz = 0.$$

## 1.32

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione, intorno all'asse $z$, del triangolo di vertici

$$(0,0,0), \quad (0,2,0), \quad (0,1,1).$$

[$2\pi$]

## 1.33

Calcolare il volume dell'insieme

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq |x|,\ 0 \leq z \leq \frac{x^2 y}{x^2+y^2+1}\right\}.$$

$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}}{9}\right]$

## 1.34

Calcolare

$$\int_\Pi z(x^2+y^2)\,dxdydz$$

dove $\Pi$ è la piramide avente per base il quadrato $ABCD$ con

$$A=(1,1,0) \quad B=(-1,1,0) \quad C=(-1,-1,0) \quad D=(1,-1,0)$$

e il vertice nel punto $(0,0,1)$.

$\left[\frac{4}{45}\right]$

## 1.35

Sia $T$ il triangolo di vertici

$$(1,0,0), \quad (3,0,0), \quad (2,0,1).$$

Calcolare il volume del solito ottenuto facendo compiere a $T$ una intera rotazione intorno all'asse $z$.

[$4\pi$]

## 1.36

Calcolare

$$\int_D \frac{1}{2x+y} dxdy$$

dove $D$ è la regione piana limitata dalle curve

$$y = x, \qquad 2y = x, \qquad y = -2x^2 + 2x, \qquad y = -x^2 + 2x.$$

$\left[2\ln\frac{6}{5} - \frac{1}{4}\right]$

## 1.37

Calcolare

$$\int_E e^{x^2+y^2} dxdydz$$

dove $E$ è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse $z$ dell'insieme

$$\{(0, y, z) \,|\, 0 \leq y \leq [\ln(1+z)]^{1/2},\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

## 1.38

Siano:

- $E$ la regione limitata del piano $yz$ racchiusa dalle curve

$$z = 0, \qquad z = y^2, \qquad z = 1 - y^2;$$

- $V$ il solido ottenuto facendo ruotare $E$ intorno all'asse $z$.

Calcolare

$$\int_V 2(x^2 + y^2 + z)\, dxdydz.$$

$\left[\frac{\pi}{3}\right]$

## 1.39

Sia $V$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(0,y,z)\,|\,1/2 \le y \le 1,\, 2y^2 \le z \le y^2+1\}$$

intorno all'asse $y$. Calcolare

$$\int_V \frac{y}{(x^2+z^2)^{1/2}} dxdydz.$$

$\left[\frac{9\pi}{32}\right]$

## 1.40

Sia $P$ la regione convessa del piano $yz$ avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,2,2), \quad (0,0,1).$$

Calcolare il volume della regione spaziale ottenuta facendo compiere a $P$ una rotazione completa intorno all'asse $y$.

$\left[\frac{10\pi}{3}\right]$

## 1.41

Calcolare l'integrale

$$\int_D 1 - x^2 - y^2 \, dxdy$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$.

$[\pi/2]$

## 1.42

Sia $A$ la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y = x, \qquad y = 2x, \qquad y + x = 1, \qquad y + x = 2.$$

Determinare il volume dell'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in A, \quad 0 \le z \le (xy)^{-1}\}.$$

$[\ln^2 2]$

## 1.43

Sia $A$ la regione compatta del piano $yz$ compresa fra l'asse delle $y$ e la curva $z = \sin y$, con $0 \leq y \leq 2\pi$. Calcolare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di $A$ intorno all'asse $z$.

$\left[8\pi^2\right]$

## 1.44

Sia

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

Calcolare il volume della porzione di $B$ compresa fra i piani di equazioni $x = 0$ e $y = x$.

[1/2]

## 1.45

Sia $\Gamma$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto da una rotazione completa del triangolo di vertici

$$(0, 1, 0), \qquad (0, 2, 0), \qquad (0, 1, 1)$$

intorno all'asse $z$. Calcolare

$$\int_\Gamma z\,\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz.$$

$[8\pi/15]$

## 1.46

Sia $D$ la regione connessa e limitata del primo quadrante di $\mathbb{R}^2$ compresa fra le rette $y = x/\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3}$ e le circonferenze $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$. Sia inoltre $S$ il grafico di

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{(x + y)z}{(1 + 4z)^{1/2}}\,d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[31(\sqrt{3} - 1)/5]$

## 1.47

Sia $V$ la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse $z$ dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \in [0, 1],\ \sqrt{y} \leq z \leq 2 - y\}.$$

Calcolare

$$\int_V 2z \, dxdydz.$$

[$7\pi/6$]

## 1.48

Calcolare

$$\int_E (1 - z)(x^2 + y^2)^{1/2} \, dxdydz$$

dove $E$ è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse $z$ dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq y \leq (1 - z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

[$\pi/12$]

## 1.49

Calcolare il volume della regione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \ln(x^2 + z^2)\}.$$

[$\pi(8 \ln 2 - 3)$]

## 1.50

Siano $A$ e $B$, rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato nell'origine e il disco di raggio 1 centrato in $(1, 0)$. Calcolare

$$\int_T (x^2 + y^2)^{-1/2} dxdy$$

dove

$$T := \{(x, y) \in A - B \,|\, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

[$2\pi/3 - \sqrt{3}$]

## 1.51

Sia $C$ il cono avente per base il disco di raggio 2 centrato nell'origine e contenuto nel piano $xy$ e per vertice il punto $(0, 0, 2)$. Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \,|\, 0 \leq z \leq 1\}$$

calcolare

$$\int_T \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(2 - z)^2} dxdydz.$$

[$\pi$]

## 1.52

Se $z \in \mathbb{R}$, indichiamo con $D_z$ il disco unitario centrato in $(0, z, z)$ e parallelo al piano $xy$. Posto

$$\Gamma := \bigcup_{z \in [0,1]} D_z$$

calcolare

$$\int_\Gamma 4\left[(y - z)^2 + x^2\right]\, dxdydz.$$

[$2\pi$]

## 1.53

Sia $F$ la regione limitata del primo quadrante del piano $yz$ racchiusa dalle curve

$$z = y^2, \qquad y = z^2.$$

Calcolare

$$\int_V |xz|\, dxdydz$$

dove $V$ è ottenuto dalla rotazione di $F$ intorno all'asse $y$.

[$1/9$]

## 1.54

Calcolare

$$\int_E z \sin(xy)\, dxdydz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z \in [-1, 1],\, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

[0]

## 1.55

Calcolare

$$\int_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy$$

dove

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

[$2 - \pi/2$]

## 1.56

Si considerino, nel piano $xy$ di $\mathbb{R}^3$, due dischi di raggio 2 centrati rispettivamente in $(0, -1, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Indichiamo con $E$ la regione ottenuta da una rotazione completa dell'unione di questi due dischi intorno all'asse $y$. Calcolare

$$\int_E 2|y|\, dxdydz.$$

[$45\pi$]

## 1.57

Si calcoli

$$\int_E \frac{2y}{x}\, dxdy$$

dove $E$ è la regione compatta del semipiano $x > 1$ limitata dalle curve

$$y = \ln x, \qquad y = 2 \ln x, \qquad y \ln x = 1, \qquad y \ln x = 2.$$

[$20/3 - 4\sqrt{2}$]

## 1.58

Sia $E$ la regione compatta racchiusa dal paraboloide $\Pi_1$ di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal paraboloide $\Pi_2$ di equazione $z = 1 - (x-1)^2 - y^2$. Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x,y,z) := \left(xy, x - \frac{y^2}{2}, z\right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

uscente dalla frontiera di $E$.

[$\pi/16$]

## 1.59

Per $t \in (0,1)$, si consideri l'insieme

$$E_t := \left\{(x,y,z) \,\middle|\, 0 \le z \le 1 - \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{(1-t)^2}\right\}.$$

Disegnare il grafico della funzione $t \to m_3(E_t)$ e determinare per quale valore di $t$ tale funzione raggiunge il suo massimo.

[$1/2$]

## 1.60

Si considerino

$$\Gamma_0 := \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

e

$$\Gamma_1 := \{(x,y,z) \,|\, (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Calcolare il volume della regione formata dai punti di $\Gamma_1$ che non appartengono a $\Gamma_0$.

[$\pi/3 + \sqrt{3}/2$]

## 1.61

Siano $\Sigma_0$ e $\Sigma_1$, rispettivamente, la sfera di raggio 2 centrata nell'origine e la sfera di raggio 1 centrata in $(0,2,0)$. Calcolare il volume di $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$.

[$13\pi/24$]

## 1.62

Sia $E$ il solido ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

intorno all'asse delle $x$. Calcolare

$$\int_E \frac{yz}{(1+x)^\pi} + 1\, dxdydz.$$

[$\pi/3$]

## 1.63

Posto

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad E := \{(x, y, z) \in C \,|\, y \leq z \leq y + 1\}$$

si svolgano i seguenti punti:

(i) Calcolare $\mathcal{L}^3(E)$;

(ii) Servirsi del risultato ottenuto in (i) e del teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) := (x, -y, z)$$

attraverso $\partial C \cap \partial E$ orientata dal campo normale esterno a $E$.

[$\pi$; 0]

## 1.64

Per $t \in (0, 1]$, sia $E_t$ l'insieme dei punti $(x, y)$ soddisfacenti la disequazione

$$x^2 + \frac{y^2}{t^2} \leq 1$$

e sia $V_t$ il solido ottenuto da una rotazione completa di $E_t$ intorno all'asse $x$. Rappresentare graficamente l'insieme $E_t$, calcolare esplicitamente il numero $\mathcal{L}^3(V_t)$ e disegnare il grafico della funzione $t \mapsto \mathcal{L}^3(V_t)$ per $t \in (0, 1]$.

[$4\pi t^2/3$]

## 1.65

Calcolare
$$\int_E (x^2+y)z\,dxdydz$$
dove $E$ è l'insieme ottenuto da una rotazione completa di
$$\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\le y\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{y}\}$$
intorno all'asse delle $z$.

[$\pi/10$]

## 1.66

Calcolare $\mathcal{L}^3(E)$, dove
$$E:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2\le 1,\,x\le y\le x\sqrt{3},\,0\le z\le 1-x^2-y^2\}.$$

[$\pi/48$]

## 1.67

Calcolare
$$\int_\Gamma (x^2+y^2-2y)e^z\,d\mathcal{L}^3(x,y,z)$$
dove
$$\Gamma:=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+(y-1)^2\le 4,\,0\le z\le 2\}.$$

[$9(e^2-1)\pi/2$]

## 1.68

Calcolare
$$\int_E ye^x\,dxdy$$
dove $E$ indica la regione limitata del piano racchiusa dalle curve
$$y=e^x,\quad y=2e^x,\quad y=e^{-x},\quad y=3e^{-x}.$$

[$2(2^{1/2}-1)(3^{3/2}-1)/3$]

## 1.69

Calcolare
$$\int_E 2(y-x)(2x+1)\, d\mathcal{L}^2(x,y)$$
dove $E$ è il sottoinsieme compatto del primo quadrante del piano cartesiano racchiuso dalle curve
$$y = x, \quad y = x+1, \quad y = 2-x^2, \quad y = 3-x^2.$$

[1]

## 1.70

Siano $A$ e $B$, rispettivamente, il disco di raggio 1 centrato in $(1,0)$ e il disco di raggio $1/2$ centrato in $(1/2,0)$. Calcolare
$$\int_{A\setminus B} x + \sin(xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y).$$

[$7\pi/8$]

## 1.71

Calcolare il volume dell'insieme
$$E := \{(x,y,z) \in P \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$$
dove $P$ è la piramide avente come vertici i punti
$$(-1,-1,0), \quad (1,-1,0), \quad (1,1,0), \quad (-1,1,0), \quad (0,0,1).$$

[$\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}$]

## 1.72

Calcolare l'integrale
$$\int_A x\, dxdy$$

dove $A$ è la regione piana compatta racchiusa dalle curve

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad y = x, \qquad x = 1.$$

$\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

## 1.73

Calcolare

$$\int_C z\, dxdydz$$

dove $C$ è il cono avente per base l'ellisse

$$\{(x, y, 0)\,|\, x^2/4 + y^2 \leq 1\}$$

e il vertice in $(0, 0, 1)$.

$[\pi/6]$

## 1.74

Calcolare

$$\int_A \frac{1}{xy^2}\, dxdy$$

dove $A$ è la regione limitata del piano compresa fra le rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = 1 - x, \quad y = 2 - 2x.$$

$[\ \frac{\ln 2}{2}\ ]$

## 1.75

Calcolare

$$\int_A 4(x^2 + y^2)\, dxdy$$

dove $A$ è la regione limitata del piano racchiusa dalle rette

$$y = x - 2, \quad y = x + 2, \quad y = -x - 1, \quad y = -x + 1.$$

[ 40/3 ]

## 1.76

Calcolare
$$\int_E x^2 y \, dxdydz$$
dove
$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq x^2, \, z \in [0, 1]\}.$$

[$\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7}$ con $a := \left(\frac{5^{1/2}-1}{2}\right)^{1/2}$]

## 1.77

Calcolare
$$\int_E x^2 y \, dxdy$$
dove
$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1, \; 0 \leq y \leq x, \; x \leq 2\}.$$

[$\frac{47}{15} + \frac{\sqrt{2}}{60}$]

## 1.78

Calcolare
$$\int_E 3y\sqrt{x^2 + z^2} \, dxdydz$$
dove $E$ è il solido ottenuto dalla rotazione del triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$ intorno all'asse $y$.

[$17\pi/10$]

## 1.79

Calcolare
$$\int_E 4xyz \, dxdydz$$
dove $E$ è la piramide di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$.

[$1/15$]

## 1.80

Calcolare

$$\int_E \frac{2(x+y)z}{3x^2+2xy}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z)$$

dove $E$ è la regione limitata racchiusa dal cilindro

$$(x-2)^2+(y-3)^2 \leq 1$$

e dai due piani

$$z = x+y, \quad z = 2x+y.$$

[$5\pi$]

## 1.81

Sia $E$ il solido ottenuto ruotando l'insieme

$$\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq z \leq 2,\ z/2 \leq y \leq z\}$$

intorno all'asse $z$. Rappresentare graficamente $E$ e calcolare

$$\int_E (x^2+y^2)^{1/2} d\mathcal{L}^3(x,y,z).$$

[$35\pi/16$]

## 1.82

Calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{2z}{x^2+y^2+1}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z)$$

dove

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq xy\}.$$

[$(2+\ln\sqrt{5})\pi/16$]

## 1.83

Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le y \le x,\, 1 \le x + y \le 2,\, 0 \le z \le 2 - x - y\}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_E (x + y + z)\, d\mathcal{L}^3(x, y, z).$$

[9/16]

## 1.84

Calcolare l'integrale

$$\int_{P\times[0,1]} \frac{z}{x + y}\, d\mathcal{L}^3$$

dove $P$ è la regione limitata del piano $xy$ racchiusa dalle rette

$$y = 8 - x, \quad y = 2 - x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2 + \frac{x}{2}.$$

[$\frac{4\ln 2}{3}$]

## 1.85

Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4,\ z \in [0, 2] \right\}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_E xyz\, dL^3(x, y, z).$$

[ 15 ]

## 1.86

Sia $S$ l'insieme dei punti

$$(\sin\theta\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\theta\sin\psi, \sin^2\theta) \in \mathbb{R}^3$$

con

$$\theta \in [0, \pi/2], \quad \psi \in [0, 2\pi].$$

- Provare che $S$ è una superficie di rotazione intorno all'asse $z$;
- Descrivere e rappresentare graficamente l'intersezione di $S$ con il piano $yz$;
- Indicato con $E$ la regione limitata di spazio tale che $\partial E = S$, calcolare $L^3(E)$.

[ L'intersezione di $S$ con il piano $yz$ è la curva di equazione $|y| = [z(1-z)]^{1/2}$. $L^3(E) = \pi/6$. ]

## 1.87

Sia $E$ la regione piana costituita dai punti $(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ tali che

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq y \leq x + 1.$$

- Rappresentare graficamente l'insieme $E \times [0, 2]$;
- Calcolare l'integrale
$$\int_{E \times [0,2]} (x + y) z \, dL^3(x, y, z).$$

[5]

# Chapter 2

# Vettori e campi vettoriali

## 2.1

Disegnare i (grafici dei) seguenti campi di vettori, dopo averne determinato i corrispondenti domini:

$$\varphi(x,y) = (xy, x/y), \qquad \varphi(x,y) = (\sqrt{x+y-2}, 0), \qquad \varphi(x,y) = (x, x^2 - y).$$

## 2.2

Dati i vettori

$$v_1 = (1,-2), \qquad v_2 = (-3,0), \qquad v_3 = (-1,4)$$

determinare $v_1 + v_2 - v_3$, $3v_1 - 2v_2 + v_3$, $|5v_1|$, $|v_1 - v_2|$. Determinare inoltre il vettore $v$ tale che $v_1 - 3v = 2v_2$.

## 2.3

Stabilire se i punti delle seguenti terne sono allineati:

$$\{(1,3);(2,5);(3,10)\}, \qquad \{(0,0,0);(2,2,0),(-1,-1,0)\}.$$

## 2.4

Determinare, nei seguenti due casi, l'angolo compreso fra i vettori $v$ e $w$:

$$v = (1,-1,-1),\ w = (2,1,1) \qquad \text{e} \qquad v = (1,-2,2),\ w = (2,3,-6)$$

## 2.5

Con riferimento all'esercizio 2.4, trovare (nei due casi) un vettore perpendicolare a $v$ e a $w$.

# Chapter 3

# Curve e superfici

## 3.1

Determinare il piano passante per l'origine e perpendicolare alla retta parametrizzata da $v(t) = t(1, -1, 5)$.

## 3.2

Trovare la retta tangente alla curva parametrizzata da $v(t)$ nel punto $P$:

$$v(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t),\ P = v(\pi/3); \qquad v(t) = (t, t^2, t^3),\ P = (1, 1, 1).$$

## 3.3

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $P_0$:

$$f(x, y) = 2x^2 y + y^2 + 3,\ P_0 = (1, 1, 6); \qquad f(x, y) = e^{x^2 y} + \sin(xy),\ P_0 = (0, 0, 1).$$

# Chapter 4

# Integrali su curve e superfici

## 4.1

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve $C$ del campo vettoriale $v(x, y) = (\sin x \cos y, e^{xy})$:

$$C:\ 0 \le x \le \pi,\ y = \frac{\pi}{3}; \qquad C:\ 0 \le y \le 1,\ x = 2.$$

## 4.2

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve $C$ del campo vettoriale $v(x, y) = (-y, x)$:

$$C:\ y = x^2, \quad 0 \le x \le 1; \qquad\qquad C:\ y = x^{1/3}, \quad 0 \le x \le 2.$$

## 4.3

Calcolare la lunghezza del bordo di $G_f$, dove

$$f(x, y) : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}, \qquad f(x, y) := x^2 - xy.$$

## 4.4

Calcolare l'area del quadrilatero ottenuto intersecando il piano di equazione $z - 2y + 3x = 10$ col cilindro a sezione quadrata $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$.

## 4.5

Consideriamo l'ellisse $E$ di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$

$$F(x, y) := (-y, x).$$

Calcolare

$$\int_E F \bullet ds$$

(suggerimento: usare la parametrizzazione $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi)$). Servirsi poi del teorema di Green per calcolare $\mathrm{mis}(E)$.

## 4.6

Se $D$ è il disco di raggio 1 centrato in $(0, 0)$, sia

$$f : D \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da $f(x, y) := xy + 1$. Si consideri anche il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x, z).$$

- Calcolare
$$\int_D f(x, y)\, dxdy.$$
- Ricavare l'espressione in coordinate cartesiane di un campo regolare di vettori normali al grafico $G_f$.
- Calcolare $\mathrm{rot}\, F$.
- Servirsi del teorema di Stokes e dei due punti precedenti per valutare l'integrale
$$\int_{G_f} \frac{2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dS.$$

[$\pi$; $(-y, -x, 1)/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$; $\mathrm{rot}\, F = (0, 0, 2)$; $2\pi$]

## 4.7

Calcolare l'area della porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ compresa tra i cilindri di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$.

## 4.8

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $\gamma_n$ il grafico della funzione $g_n : [0,2] \to \mathbf{R}$ così definita:

$$g_n(t) := \begin{cases} nt & \text{se } 0 \le t < 1 \\ \\ n & \text{se } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} e^{-3x-y}.$$

## 4.9

Dati la superficie

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \ |z| \le 1\}$$

(orientata a piacere) e il campo di vettori

$$F(x,y,z) := (e^{-z^2}, e^{-z^2}, 0),$$

calcolare

$$\int_C F \bullet dS.$$

[0]

## 4.10

Sia $F(x,y,z) := (2y, -x, -x)$ e $C$ la circonferenza unitaria nel piano di equazione $z = y$ (centrata nell'origine). Calcolare il lavoro compiuto da $F$ lungo $C$ orientata a piacere.

## 4.11

Considerato l'insieme

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x, y \ge 0 \ \text{ e } \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\},$$

calcolare il seguente integrale applicando il teorema di Green

$$\int_{\partial\Omega} -y\,dx \,+\, \ln(x^2+y^2)\,dy \;=\; \int_{\partial\Omega} (\,-\,y\,,\,\ln(x^2+y^2)) \bullet ds.$$

## 4.12

Sia $C$ la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione $y \mapsto 2|y|$ attorno all'asse $z$. Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \,|\, 1 \le z \le 2\},$$

calcolare l'integrale

$$\int_T z\, dS.$$

$[7\pi\sqrt{5}/6]$

## 4.13

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ y < 1\}$$

orientata in modo tale che il suo vettore normale nel punto $(0, 0, \sqrt{2})$ coincida con $(0, 0, 1)$. Posto

$$F(x, y, z) := (xy, (y-1)e^{z^2}\cosh x, yz), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

si calcoli

$$\int_S \operatorname{rot} F \bullet dS.$$

Quanto vale tale integrale se si sceglie per $S$ l'altra possibile orientazione?

[0]

## 4.14

Sia $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y) := (x \arctan y, x), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

e sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 1 - x^2\}$. Si calcoli

$$\int_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\, dxdy.$$

## 4.15

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y \in [0, 1],\ x = 0,\ z = 1 - y^2\}$$

intorno all'asse $y$.

## 4.16

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ il disco unitario centrato in 0 e

$$f(x,y) := 1 + (x^2+y^2)^{1/2}, \qquad (x,y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_{G_f} \cos(z-1)^2 dS$$

dove $G_f$ è il grafico di $f$.

## 4.17

Si consideri il cilindro avente raggio 1 e asse coincidente con l'asse delle $x$. Calcolare l'area delle regioni limitate e connesse di tale cilindro, ottenute sezionandolo coi piani

$$y = x, \qquad y = -x.$$

[4; 4]

## 4.18

Indicato con $G$ il grafico della funzione

$$(x,y) \mapsto \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (\varepsilon > 0)$$

si calcoli l'area della regione di $G$ contenuta nel cilindro di equazione $x^2+y^2=1$. Calcolare il limite di quest'area, per $\varepsilon \downarrow 0$ (se lo si preferisce, ci si avvalga di un argomento intuitivo).

$\left[\frac{2\pi}{3\varepsilon^2}\left((\varepsilon^2+1)^{3/2}-1\right);\ \pi\right]$

## 4.19

Il grafico della funzione

$$(x,y) \mapsto x^2 + 4y^2$$

divide il piano di equazione

$$z = 2x + 8y - 1$$

in due regioni, di cui una finita. Calcolare l'area di quest'ultima.

$\left[2\pi\sqrt{69}\right]$

## 4.20

Calcolare l'area della regione costituita dai punti del piano

$$z = \sqrt{5}\, y$$

interni all'ellissoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$\left[2\pi\sqrt{6}\right]$

## 4.21

Sia $P$ il parallelogramma nel piano di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ e poniamo

$$S := \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in P\}.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{xy}{\sqrt{1+4z}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$\left[\frac{7}{12}\right]$

## 4.22

Sia $\Sigma$ l'arco di elica parametrizzato da

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e si consideri il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (2xz, 2yz, x^2 + y^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare $\int_\Sigma F$.

$[2\pi]$

## 4.23

Indicata con $C$ la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $x + y = z$, si calcoli

$$\int_C \sqrt{3(x^2 + y^2) - z^2}\, d\mathcal{H}^1.$$

[$4\pi$]

## 4.24

Posto
$$S_\varepsilon := \{(x, y, \ln(x^2+y^2)^{1/2}) \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\} \qquad (\varepsilon > 0)$$
calcolare
$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} d\mathcal{H}^2.$$

[$2\pi$]

## 4.25

Sia $C$ l'ellisse ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ con il piano di equazione $z=x$. Calcolare
$$\int_C (1+y^2)^{1/2} ds.$$

[$3\pi$]

## 4.26

Sia $S$ il grafico della funzione
$$T \ni (x,y) \mapsto e^{3x+4y}$$
dove $T$ è il triangolo piano di vertici $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$. Calcolare
$$\int_S \left(1+25z^2\right)^{1/2} d\mathcal{H}^2(x,y,z).$$

$\left[\frac{313}{48} + \frac{575}{48} e^{24}\right]$

## 4.27

Sia $E$ la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro
$$x^2+(y-1)^2=1$$

e i piani

$$z = 0, \qquad z = y.$$

Calcolare il flusso uscente da $E$ del campo vettoriale $(x, y, z) \mapsto (z - y, zx - yx, zy - y^2)$. Come si spiega l'uguaglianza fra questo risultato e quello dell'esercizio 1.26 ?

[$5\pi/4$]

## 4.28

Si consideri la funzione

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{2(x + y)}$$

dove $D$ è il parallelogramma di vertici $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$ e $(3, 2)$. Calcolare

$$\int_{G_f} \frac{(x - y)^3 z^{-2}}{\sqrt{(x + y)^4 + x^2 + y^2}} dS.$$

[6]

## 4.29

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\}$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (y, -x, x + y + z).$$

Verificare che vale il Teorema di Stokes (comunque si orienti $S$)

$$\int_{\overline{S}} \text{rot } F = \int_{\partial \overline{S}} F.$$

[Entrambi gli integrali valgono $\pm 2\pi$]

## 4.30

Si considerino: il cilindro

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0, 1]\},$$

il campo normale "esterno" a $C$

$$N : C \to \mathbb{R}^3, \qquad N(x,y,z) := (x,y,0)$$

e infine un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di classe $C^1$, della forma

$$F(x,y,z) := (a(x,y)\,,\, b(x,y)\,,\, c(x,y,z)).$$

Verificare che, in questa situazione, la formula di Stokes

$$\int_{\partial(C,N)} F = \int_{(C,N)} \operatorname{rot} F$$

si riduce all'uguaglianza

$$\int_C x\frac{\partial c}{\partial y} - y\frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

## 4.31

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto (0,x)$$

e la regione limitata $E$ racchiusa dalle curve di equazione

$$y = 0, \qquad x + y = 2, \qquad y = x^2 \ (x \geq 0).$$

Calcolare

$$\int_{\partial E} F$$

e mostrare che il risultato trovato coincide con l'area di $E$.

$[\frac{5}{6}]$

## 4.32

Si considerino il quadrato $Q$ di vertici

$$(0,0,0) \quad (1,0,0) \quad (1,1,0) \quad (0,1,0)$$

e il campo di vettori

$$F(x,y,z) := (\, y(z+1)\,,\, x^2(1-z^2)\,,\, \ln(1+x^2y^2z^4)), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Usare il Teorema di Stokes per calcolare l'integrale di $F$ lungo $\partial Q$, con l'orientazione indotta dall'elenco dei vertici di cui sopra.

[0]

## 4.33

Sia $T$ il triangolo di vertici

$$(1,0,0), \quad (3,0,0), \quad (2,0,1).$$

Calcolare l'area della superficie del solito ottenuto facendo compiere a $T$ una intera rotazione intorno all'asse $z$.

$\left[8\pi(1+\sqrt{2})\right]$

## 4.34

Un piano $\Pi$, coincidente all'istante iniziale ($t=0$) con il piano $xz$, ruota intorno all'asse $z$ con velocità angolare unitaria. Si considerino i due punti $A$ e $B$ in $\Pi$ che, per $t=0$, occupano le posizioni $(1,0,0)$ e $(2,0,1)$ rispettivamente. Supponiamo che il punto $P \in \Pi$ percorra il segmento $AB$ con velocità costante dalla posizione iniziale $A$ (per $t=0$) alla posizione finale $B$ (per $t=2\pi$). Determinare la posizione $\gamma(t)$ occupata da $P$ all'istante $t$. Calcolare inoltre la lunghezza della traiettoria compiuta da $P$ (per $0 \le t \le 2\pi$).

$\left[\left(\frac{x^2}{8}+\ln x-\frac{1}{2x^2}\right)_{\sqrt{16\pi^2+2}-4\pi}^{\sqrt{4\pi^2+2}-2\pi}\right]$

## 4.35

Sia $C$ la semicirconferenza orientata nel quadrante piano

$$\{(0,y,z)\,|\,y \ge 0,\ z \ge 0\}$$

avente l'origine come punto iniziale e $(0,0,2)$ come punto finale. Calcolare

$$\int_C F$$

dove $F$ è il campo vettoriale definito nell'esercizio 5.25.

$\left[\frac{8}{3}\right]$

## 4.36

Sia $C$ una curva piana regolare e sia

$$S := C \times [a,b] = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in C,\ z \in [a,b]\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{H}^2(S) = (b-a)\mathcal{H}^1(C)$.

## 4.37

Sia $P$ la regione convessa del piano $yz$ avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,2,2), \quad (0,0,1).$$

Calcolare

$$\int_{\partial P} (0,-z,y)$$

dove l'orientazione scelta per $\partial P$ è quella indotta dall'ordine in cui sono stati elencati i suoi vertici.

[4]

## 4.38

Calcolare l'area della superficie

$$\{(x,y,x^2-y^2) \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

$\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\right]$

## 4.39

Sia $A$ la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y=0, \qquad y=x, \qquad y+x=1, \qquad y+x=2$$

e sia $S$ il grafico della funzione

$$A \to \mathbf{R}, \quad (x,y) \mapsto x+y.$$

Calcolare

$$\int_S (x+y)z \, d\mathcal{H}^2(x,y,z).$$

$\left[\frac{15\sqrt{3}}{8}\right]$

## 4.40

Sia $\Gamma$ l'insieme definito nell'esercizio 1.45 e sia

$$S := \{(x,y,z) \in \partial\Gamma \mid x^2+y^2 > 1, \ z > 0\}.$$

Calcolare
$$\int_S z\, d\mathcal{H}^2(x,y,z).$$

$\left[4\pi\sqrt{2}/3\right]$

## 4.41

Sia $\overline{G}$ il grafico della funzione
$$(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2), \qquad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$$
orientato dal campo normale avente la terza componente positiva. Calcolare
$$\int_{\partial\overline{G}} (-y, x, \sin(xy))$$

$[6\pi]$

## 4.42

Sia $\overline{C}$ la curva orientata avente come luogo
$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0,\, x \geq 0,\, x^2+z^2 = 1\}$$
percorsa nel senso in cui $z$ cresce. Calcolare l'integrale
$$\int_{\overline{C}} (-z, z(x+y), x).$$

$[\pi]$

## 4.43

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse $y$ la curva del piano $yz$ di equazione $z = y^2$ con $y \in [0,1]$.

## 4.44

Sia $S_\theta$ la superficie ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse $y$ del segmento di estremi

$$(0,0,1), \qquad (0,\cos\theta, 1+\sin\theta).$$

Calcolare $\mathcal{H}^2(S_\theta)$ e disegnare il grafico di $\theta \mapsto \mathcal{H}^2(S_\theta)$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$[\pi(2+\sin\theta)]$

## 4.45

Calcolare $\mathcal{H}^2(\partial E)$, dove $E$ è il solido definito nell'esercizio 5.33.

## 4.46

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x+y-z)\, d\mathcal{H}^2(x,y,z)$$

dove

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 1,\ z=y\}.$$

[0]

## 4.47

Calcolare l'area della regione compatta del cilindro $x^2+y^2=1$ racchiusa dal segmento $\{(1,0)\}\times[1,2]$ e dalle due eliche

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t), \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 2t)$$

con $t \in [0,1]$.

$[\pi]$

## 4.48

Sia $\Gamma$ il cono di equazione $z = (x^2+y^2)^{1/2}$ e sia $S$ la spirale parametrizzata da

$$\gamma(t) := (t\cos t, t\sin t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Sia inoltre $C$ la curva regolare inclusa in $\Gamma$ e tale che $S$ coincide con la proiezione ortogonale di $C$ in $\mathbb{R}^2_{xy}$. Calcolare

$$\int_C (2+z^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^1(x,y,z).$$

[$2\pi$]

## 4.49

Siano $\Pi_1$ e $\Pi_2$ i paraboloidi definiti nell'esercizio 1.58. Calcolare

$$\int_{\Pi_1 \cap \Pi_2} (1+4y^2+x-z)^{1/2}\, d\mathcal{H}^1(x,y,z).$$

[$3\pi/2$]

## 4.50

Sia $S$ il sottoinsieme limitato del paraboloide $z = x^2+y^2$ compreso fra i piani di equazioni $z = 2y$ e $z = 4y$. Calcolare poi l'integrale

$$\int_S (1+4x^2+4y^2)^{-1/2}\, d\mathcal{H}^2(x,y,z).$$

[$3\pi$]

## 4.51

Si considerino le sfere $\Sigma_0$ e $\Sigma_1$ dell'esercizio 1.61. Calcolare l'area di $\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_0$.

[$\pi$]

## 4.52

Per $\varepsilon > 0$, definiamo $C_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$ e indichiamo con $S_\varepsilon$ il grafico della funzione

$$f_\varepsilon : C_\varepsilon \to (0,+\infty), \qquad f_\varepsilon(x,y) := (x^2+y^2)^{-1/4}.$$

Provare che

$$\mathcal{H}^2(S_\varepsilon) \leq (3 - \varepsilon^{1/2})\pi.$$

## 4.53

Calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

dove:

(i) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, 0 \leq y \leq x,\ z \geq 0\}$;

(ii) $\tau$ è un campo unitario tangente a $\partial S$, scelto arbitrariamente fra quelli continui nelle parti interne dei tratti regolari;

(iii) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (yz, yz, yz)$.

[$\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$]

## 4.54

Calcolare

$$\int_\Gamma \sqrt{2y(x^2 + z^2)}\, d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove $\Gamma$ è la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ col cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

[$5\pi$]

## 4.55

Si consideri la curva regolare orientata $(C, \tau)$, dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2\}$$

e l'orientazione $\tau$ è scelta a piacere fra le due possibili. Calcolare

$$\int_{(C, \tau)} (\, \ln(2x - z + 1)\,,\ x + y - 1\,,\ -yz/4).$$

[$2\pi$]

## 4.56

Sia $E$ la regione compatta del piano racchiusa dalle curve

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}.$$

e sia $F : E \to \mathbb{R}^2$ il campo di vettori definito come segue

$$F(x, y) := \left( \ln x \, , \, \frac{3}{2}x^2 + \sin y \right).$$

Usare il teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove $\tau_E$ indica l'orientazione positiva di $\partial E$.

[$9(16^{1/3} - 1)(1 - 32^{-1/3})/20$]

## 4.57

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0, \, z = 1 - y\}$$

e il campo di vettori $F : S \to \mathbb{R}^3$ così definito

$$F(x, y, z) := \left( \frac{y^2}{2} + z \, , \, xy \, , \, \sin(y + z) \right).$$

Scelta a piacimento l'orientazione $\tau$ di $\partial S$, calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

servendosi del teorema di Stokes.

[$\pi/2$]

## 4.58

Calcolare

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{e^z} d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$

dove $S$ è la superficie ottenuta facendo ruotare la curva $\{(0, y, \ln y) \,|\, y \in [1, 2]\}$ intorno all'asse $z$.

[$2\pi(5^{3/2} - 2^{3/2})/3$]

## 4.59

Sia $S$ la superficie ottenuta facendo ruotare l'insieme

$$\{(0, y, \cos y) \mid y \in [0, \pi/2]\}$$

intorno all'asse $z$. Provare che la funzione

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}}, \quad (x, y, z) \in S$$

è limitata e calcolare

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\pi^3/4]$

## 4.60

Calcolare

$$\int_C \frac{(5 - x^2 - 4y^2)z}{(3y^2 + 10)^{1/2}} \, d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove $C$ è l'elica ellittica parametrizzata da

$$\gamma(t) := (2 \cos t, \sin t, 3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$[6\pi^2]$

## 4.61

Indicato con $S$ il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, consideriamo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in S \mid (x, y) \in [A; B]\}$$

dove $A := (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Calcolare

$$\int_{(\Gamma,\tau)} (2z, x, y)$$

dove $\tau$ è un campo vettoriale unitario tangente a $\Gamma$, scelto a piacimento.

$[\pm 1/2]$

## 4.62

Si consideri la calotta parabolica ottenuta facendo ruotare la curva

$$\{(0, y, z) \,|\, z = 1 - y^2,\ y \in [0, 1]\}$$

intorno all'asse $z$. Calcolare il valore di $q$ per il quale il piano $z = q$ divide la calotta in due superfici di area uguale.

[$q = \frac{1}{4}(5 - (\frac{1+5^{3/2}}{2})^{2/3})$]

## 4.63

Calcolare l'integrale

$$\int_{\partial S} xyz \, d\mathcal{H}^1$$

dove

$$S := \{(x, y, x^2 - y^2) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

[0]

## 4.64

Calcolare

$$\int_{\overline{S}} \left( \frac{y}{x}, \ln \frac{x}{y}, x - y + z \right)$$

dove $\overline{S}$ è il segmento orientato di punto iniziale $(1, 1, 2)$ e di punto finale $(3, 3, 0)$.

[0]

## 4.65

Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiti come segue

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy, \quad g(x, y) := 1 + xy,$$

$$F(x, y, z) := (x, y, z - xy).$$

Calcolare l'integrale del campo $F$ lungo la curva ottenuta dall'intersezione dei grafici delle funzioni $f$ e $g$, orientata a piacimento.

[0]

## 4.66

Sia $A$ il quadrilatero chiuso limitato dalle rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = 1 - x, \quad y = 1 - 2x$$

e si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in A,\ z = x\}.$$

Disegnare $A$ e calcolare

$$\int_S \frac{1}{xyz}\, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

[$\sqrt{2}\ln 2$]

## 4.67

Sia $\overline{S}$ il segmento orientato avente $(1, 0, 0)$ come punto iniziale e $(0, 1, 0)$ come punto finale. Sia $\overline{C}$ la semicirconferenza orientata del piano $yz$ avente $(0, 1, 0)$ come punto iniziale, $(0, 1, 2)$ come punto finale e passante per $(0, 0, 1)$. Disegnare la curva orientata $\overline{S} \cup \overline{C}$ e calcolare l'integrale

$$\int_{\overline{S}\cup\overline{C}} (x, x(1 - z), \sin(z + xy)).$$

[$1 - \cos 2$]

## 4.68

Sia $B$ la palla unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Se $u \in \partial B$, indichiamo con $\Pi_u$ il piano ortogonale ad $u$ passante per l'origine. Calcolare il minimo e il massimo della funzione

$$\Phi : \partial B \cap \mathbb{R}^2_{yz} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := \int_{\partial(B\cap\Pi_u)} (y^2, -z, x)$$

dove $B \cap \Pi_u$ va intesa come superficie orientata da $u$.

[$\min_{u\in\partial B\cap\mathbb{R}^2_{yz}} \Phi = -\pi,\ \max_{u\in\partial B\cap\mathbb{R}^2_{yz}} \Phi = \pi$]

## 4.69

Calcolare

$$\int_S \left(\frac{2-z^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2} dH^2(x,y,z)$$

dove $S$ è la superficie ottenuta facendo compiere alla curva $\{(0,y,\sin y)\,|\,y \in [2\pi, 4\pi]\}$ un giro completo intorno all'asse $z$.

$[6\pi^2]$

## 4.70

Un piano $\Pi$ parallelo al piano $xy$, si muove (rimanendo sempre parallelo al piano $xy$) in modo che all'istante $t$ la terza coordinata dei suoi punti sia $2t$. Contemporaneamente, un punto $P \in \Pi$ si muove lungo il grafico della funzione sin e la sua prima coordinata all'istante $t$ vale $t^2$.

- Scrivere un'espressione per la posizione del punto $P$ all'istante $t$;
- Indicata con $C$ la curva percorsa da $P$ quando $t$ passa dall'istante 0 all'istante 1, provare che la funzione
$$f(x,y,z) := \frac{(y+\cos x)z}{[x(2-y^2)+1]^{1/2}}$$
è ben definita e limitata in $C$;
- Calcolare $\int_C f\, dH^1$.

$[(t^2, \sin t^2, 2t);\ 2(\sin 1 - \cos 1 + 1)]$

## 4.71

Per ogni $m \in \mathbb{R}$, si consideri la superficie

$$S_m := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2+y^2-1,\ z \le 2my\}.$$

- Descrivere (anche graficamente) la proiezione di $S_m$ nel piano $xy$ e cioè l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in S_m \text{ per qualche } z \in \mathbb{R}\}$;
- Calcolare l'integrale
$$I(m) := \int_{S_m} \frac{z+m^2-2my+1}{(1+4x^2+4y^2)^{1/2}}\, dH^2(x,y,z);$$

- Tracciare un grafico qualitativo della funzione $m \mapsto I(m)$ e stabilire per quale $m$ il valore $I(m)$ è minimo.

[ La proiezione di $S_m$ nel piano $xy$ è il disco di raggio $(1+m^2)^{1/2}$ centrato in $(0,m)$. $I(m) = \pi(1+m^2)^2/2$, che è minima per $m=0$. ]

## 4.72

Sia $D$ la regione limitata del piano $yz$ racchiusa dalle curve $y=3$ e $y=4z-z^2$. Rappresentare graficamente il solido $E$ ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse $z$ dell'insieme $\{0\}\times D$. Calcolare

$$\int_{\partial E} \frac{x^2+y^2-9}{(4z-z^2)\sqrt{1+(4-2z)^2}}\, dH^2(x,y,z).$$

[$\frac{272\pi}{15}$]

# Chapter 5

# Flusso di un campo vettoriale

## 5.1

Si consideri il semidisco
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$
e si indichi con $E$ il sottografico della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) := y.$$
Sia inoltre dato il seguente campo di vettori
$$F(x, y, z) := (0, 1 - x^2 - y^2, -y).$$
Calcolare allora i seguenti due flussi (uscenti da $E$) di $F$:

- quello attraverso la "superficie laterale", cioè la parte di $\partial E$ che giace parallela all'asse $z$;
- quello attraverso la "base" $D$.

Infine, usando il teorema di Gauss della divergenza, determinare il flusso ascendente di $F$ attraverso il grafico di $f$.

## 5.2

Sia $B \subset \mathbb{R}^2$ il disco di raggio 1 centrato in $(0, 1)$. Si consideri inoltre la funzione $f : B \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 1$$
e si denoti con $E$ il suo grafico. Allora:

- calcolare l'integrale di superficie

$$\int_E \frac{y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS;$$

- assumendo $\partial E$ orientata compatibilmente con la direzione positiva dell'asse $z$, calcolare

$$\int_{\partial E} F \bullet ds$$

  dove $F(x,y,z) := (z, xy^2, x)$.

Come si può giustificare l'uguaglianza di questi due integrali?

## 5.3

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco di raggio 1 centrato nell'origine e consideriamo la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := 1 - (x^2+y^2) = 1 - x^2 - y^2.$$

Sia inoltre $F$ il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x,y,z) := (x, 0, 0).$$

Affrontare le seguenti questioni:

- calcolare il flusso $\Phi$ di $F$ attraverso il grafico di $f$ (orientato dal campo delle normali aventi la terza componente positiva);
- calcolare la misura $\mu$ del sottografico di $f$;
- utilizzare il teorema della divergenza di Gauss per spiegare l'apparente coincidenza $\Phi = \mu$.

[$\pi/2; \pi/2$]

## 5.4

Si consideri la funzione

$$f(x,y) : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 - xy$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) := (1, 0, x).$$

Denotata con $G_f$ la superficie data dal grafico di $f$ e scelta per essa l'orientazione corrispondente al campo normale avente la terza componente positiva, si calcoli

$$\int_{G_f} F \bullet dS.$$

[0]

## 5.5

Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove $C$ è il bordo del semidisco

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

percorso in senso antiorario e

$$F(x,y) := (xy, \ln(y+1)).$$

[0]

## 5.6

Si consideri la funzione

$$f := [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 + xy$$

e il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) := (x, z, 0).$$

Calcolare il flusso di $F$ attraverso il grafico di $f$, scegliendo il verso di attraversamento concorde alla direzione positiva dell'asse $\mathbb{R}_z$.

## 5.7

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) := \left(\frac{x}{2}\,,\, 0\,,\, z - y^2 + 1\right)$$

per la superficie data dal grafico della funzione

$$f(u,v) := u^2 + v^2 : B_1(0,0) \to \mathbb{R}$$

attraversata nella direzione in cui $z$ cresce.

## 5.8

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ il disco unitario centrato nell'origine e si consideri $f : D \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := \frac{e^{x \sin y} \ln(1 + x^2 + y^2)}{2 + \cos(x - y)}.$$

Calcolare il flusso (ascendente) attraverso il grafico di $f$ del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, 2y).$$

## 5.9

Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale definito come segue

$$F(x, y) := (x^3 y, \cos x).$$

Calcolare il flusso di $F$ attraverso la curva

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\}$$

nella direzione uscente dal disco unitario.

[0]

## 5.10

Siano dati l'insieme

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}/2 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y^3 e^{z^2}, y, \arctan x), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso di $F$ uscente dalla superficie $\partial D$.

## 5.11

Si consideri la piramide $P$ con "punta" in $(0, 0, 1)$ e avente per base il quadrato di vertici $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$. Inoltre, sia dato il campo definito da

$$F(x, y, z) := (2x - (2 + x) \ln(2 + x), y \ln(2 + x), x + z)\,, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso (ascendente) di $F$ attraverso la superficie laterale di $P$.

## 5.12

Applicare il teorema di Gauss della divergenza e il risultato dell'esercizio precedente per calcolare l'area di $\partial B \cap C$ (suggerimento: considerare il campo $F(x, y, z) := (x, y, z)$).

## 5.13

Si consideri la regione limitata $E$ la cui frontiera è data dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Usare il Teorema di Green per determinare l'area di $\{(x, y) \in E \,|\, x \geq 1\}$.

## 5.14

Sia $B$ la palla di raggio 1 centrata nell'origine e $C$ il cono

$$\{(x, y, z) \,|\, z \geq (x^2 + y^2)^{1/2}\}.$$

Considerato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

calcolare

$$\int_{B \cap C} \operatorname{div} F$$

dapprima in modo diretto e in seguito avvalendosi del Teorema di Gauss della divergenza.

[0]

## 5.15

Sia $E$ l'intersezione fra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $z = y$. Scelta per $E$ un'orientazione $\tau$, calcolare

$$\int_{(E,\tau)} (x, y, z).$$

[0]

## 5.16

Sia $D$ il disco nel piano coordinato $xz$, di raggio unitario e centro l'origine. Calcolare il flusso del campo

$$(x, y, z) \mapsto \left(\cos(x+y)\,,\ \frac{xz}{1+y^2}\,,\ \ln(1+x^2)\right)$$

attraverso $D$ orientato a piacere.

[0]

## 5.17

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z > -1\} \to \mathbf{R}^3$$

definito come segue

$$F(x, y, z) := \left(xz\,,\ \frac{y}{z+1}\,,\ -\frac{z^2}{2} + z - \ln(1+z)\right).$$

Inoltre, indicato con $D$ il disco unitario del piano $xy$ centrato nell'origine, sia $E$ il sottografico della funzione

$$D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := [1 + \sin(xy)](1 - x^2 - y^2).$$

Calcolare dapprima l'integrale

$$\int_E div\, F$$

e poi, servendosi del risultato ottenuto e del teorema della divergenza, calcolare anche il flusso (ascendente) di $F$ attraverso il grafico di $f$.

[$\pi/2$ ; $\pi/2$]

## 5.18

Sia $C$ il cono con il vertice in $(0, 0, 1)$ e avente come base il disco unitario del piano $xy$ centrato nell'origine. Inoltre, si indichi con $S$ la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \leq 0\}.$$

Posto $V := C \cup S$ e considerato il campo

$$F(x, y, z) := (x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

si verifichi che vale il Teorema della divergenza

$$\int_V \mathrm{div} F = \int_{\partial V} F \cdot N$$

dove $N$ è il campo delle normali esterne a $V$ nei suoi punti di frontiera.

[I due integrali valgono $3\pi$]

## 5.19

Determinare il campo $G = (G_1, G_2)$ avente come potenziale la funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Servirsi del Teorema di Green per calcolare

$$\int_D G_1 - G_2$$

dove $D$ è il disco unitario centrato nell'origine.

$\left[\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}(x, y);\ 0\right]$

## 5.20

Siano dati il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (zy, zx, y(x + 1)), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la curva poligonale chiusa $\overline{C}$ congiungente (nell'ordine) i seguenti punti

$$(0, 0, 0); \quad (1, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (0, 1, 1); \quad (0, 0, 1); \quad (0, 0, 0).$$

Applicare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\overline{C}} F.$$

[1]

## 5.21

Utilizzare l'uguaglianza provata nel Problema 1.31 e il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare il flusso (ascendente) del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \big(z(x^2 + y^2 - 1), z(x^2 + y^2 - 1), xy\big)\,; \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (1 + xy)^{1/2}; \qquad 0 \le x^2 + y^2 \le 1.$$

[0]

## 5.22

Sia $\mathcal{P}$ la piramide di vertici

$$(0, 0, 0); \qquad (2, 0, 0); \qquad (1, 1, 0); \qquad (0, 1, 0); \qquad (1, 1, 1).$$

Applicare a $\mathcal{P}$ il teorema della divergenza per calcolare il flusso ascendente del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso la superficie poliedrale data dall'unione dei due triangoli di vertici rispettivamente

$$(0, 0, 0); \qquad (2, 0, 0); \qquad (1, 1, 1)$$

e

$$(0, 0, 0); \qquad (0, 1, 0); \qquad (1, 1, 1).$$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

## 5.23

Sia $P$ la piramide limitata dai tre piani cartesiani di $\mathbb{R}^3$ e dal piano passante per i punti

$$(1, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 3).$$

Determinare il flusso uscente da $P$ del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (xyz, xyz, xyz).$$

Usare quindi il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare

$$\int_P (yz + xz + xy)\, dxdydz.$$

$\left[\frac{11}{20};\ \frac{11}{20}\right]$

## 5.24

Servirsi del teorema di Green per calcolare l'area dell'insieme $E$ definito come la regione limitata del piano racchiusa dalle curve

$$y = 0, \qquad y = x^2, \qquad y = 1 - x^2.$$

$\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right]$

## 5.25

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x, y, z^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semisfera

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

Si calcoli

$$\int_E \operatorname{div} F.$$

Usando tale risultato e il teorema della divergenza, ricavare poi

$$\int_{\partial E} (x^2 + y^2 + z^3)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$\left[\frac{11\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3}\right]$

## 5.26

Si consideri il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x, y, 1 - 2z)$$

e la superficie

$$S := \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Usare il teorema della divergenza e il risultato dell'esercizio 1.41 per calcolare il flusso ascendente di $F$ attraverso $S$.

$[3\pi/2]$

## 5.27

Consideriamo il campo

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$$

e il tronco di cilindro

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + y\}.$$

Calcolare il flusso ascendente di $F$ attraverso l'ellisse

$$E := \{(x, y, 1 + y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

nei seguenti due modi:

- Mediante calcolo diretto;
- Applicando il teorema della divergenza alla regione $\Gamma$ e al campo $F$.

[$\pi$]

## 5.28

Indichiamo con $S_1$ il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}, \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

e con $S_2$ quello di

$$(x, y) \mapsto 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Calcolare:

- il flusso discendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso $S_1$;
- (usando il Teorema della divergenza e il risultato ottenuto nell'esercizio 1.47) il flusso ascendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso $S_2$.

[$\pi/3\,;\ 5\pi/6$]

## 5.29

Consideriamo:

- il campo vettoriale
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) := \left(\frac{z}{x}, x, \ln y\right);$$
- la regione piana compatta $A$ limitata dalle rette
$$y = x, \qquad y = 2x, \qquad x + y = 1, \qquad x + y = 2;$$
- il grafico $G$ della funzione
$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := xy.$$

  Usare il Teorema di Stokes per calcolare
$$\int_{\partial G} F$$
  dove per $\partial G$ si sia scelta arbitrariamente una delle due orientazioni.

[$\pm 1/4$]

## 5.30

Sia $S$ il grafico della funzione
$$[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto y$$
e sia $N$ il campo normale a $S$ avente la terza componente positiva. Servirsi del Teorema di Stokes per calcolare
$$\int_{\partial(S,N)} (z, x, x).$$

[1]

## 5.31

Siano $\Gamma$ e $D_z$ gli insiemi definiti nell'esercizio 1.52, sia $N$ il campo normale a $\partial\Gamma$ uscente da $\Gamma$, sia $\Sigma := \partial\Gamma - (D_0 \cup D_1)$ e
$$F(x, y, z) := (x, y, -2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
Calcolare
$$\int_\Sigma F \cdot N$$
usando il Teorema di Gauss.

[$2\pi$]

## 5.32

Verificare la formula di Stokes
$$\int_{(D,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(D,N)} F$$
dove $D$ è il disco di raggio 1 e centro $(0,1,1)$ incluso nel piano $y = 1$, $N := (0,1,0)$ e
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y,z) := (-yz, xz, xy).$$

## 5.33

Sia $E$ il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse $z$ della regione compatta del piano $yz$ delimitata dall'arco di parabola $z = y^2 - y$ con $y \geq 0$, dalla retta $z = 2$ e dall'asse $z$. Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente da $E$ del campo vettoriale
$$(x,y,z) \mapsto \left( \frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2}, (1+z^2)\sqrt{x^2+y^2} \right), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

[$3072\pi/35$]

## 5.34

Applicare il teorema della divergenza all'insieme
$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$$
e al campo di vettori
$$F(x,y,z) := (-y, x-1, z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
per calcolare il flusso ascendente di $F$ attraverso la superficie
$$\{(x,y,z) \in \partial E \,|\, x^2+y^2+z^2 = 4\}.$$

[$8\pi/3$]

## 5.35

Si consideri la parametrizzazione di curva piana
$$\gamma(t) := \left(t, \frac{\sin t}{t}\right), \quad t \in \left[\pi, \frac{\pi}{2}\right]$$

e il campo di vettori

$$F(x,y) := \left( \frac{3\pi}{2} y \,,\, \left( x - \frac{\pi}{2} \right) (\pi - x) \right), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma F$$

applicando il teorema di Green al sottografico di $t \mapsto \sin t/t$, con $t \in (\pi/2, \pi)$.

[−2]

## 5.36

Eseguire di nuovo il calcolo del flusso considerato nell'esercizio 1.63, stavolta direttamente (e cioè senza ricorrere al teorema della divergenza).

[0]

## 5.37

Siano dati il sottoinsieme compatto $E$ del primo quadrante del piano cartesiano limitato dalle curve

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) := (y, x^2 y + x).$$

Servirsi del teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove $\tau_E$ è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente $\partial E$.

[4]

## 5.38

Per $R > 0$, sia

$$E_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq R\}$$
$$S_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq R\}.$$

Inoltre si indichi con $N$ il campo normale esterno a $\partial E_R$ e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) := \left( \frac{xy^2}{(z+2)^2}\,,\, 0\,,\, z \right).$$

Dopo aver verificato che per ogni $(x,y,z) \in S_R$ si ha

$$\frac{x^2y^2}{(z+2)^2} = F(x,y,z) \cdot N(x,y,z)$$

applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \frac{x^2y^2}{(z+2)^2}\, d\mathcal{H}^2(x,y,z).$$

[$\pi/8$]

## 5.39

Sia $G$ il grafico della funzione

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 1\} \ni (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+3}$$

e sia $\nu$ il campo normale a $G$ tale che $\nu_3 > 0$. Calcolare il rotore di

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y,z) := (-y, x, x^2z^2)$$

e usare il teorema di Stokes per provare che

$$\int_{(G,\nu)} (0, -xz^2, 1) = \pi.$$

[$\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0, -2xz^2, 2)$]

## 5.40

Si consideri l'insieme

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}$$

e sia $\nu$ il campo di vettori normali esterni a $\partial E$. Applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\int_{(\partial E,\nu)} (\ln(1+y), (x+y)^2).$$

[7]

## 5.41

Data la superficie
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$
sia $\nu$ il campo continuo normale a $S$ avente la terza componente positiva. Inoltre sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come segue
$$F(x, y, z) := \Big(xye^z \,,\, e^{x^2+y^2} \,,\, \sin(xyz)\Big)\,.$$

- Calcolare $\operatorname{rot}\mathrm{F}$ in $(x, y, z)$ e $\nu$ in $(x, y, x^2 + y^2) \in S$;
- Usare il teorema di Stokes per calcolare
$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot}\mathrm{F}.$$

[$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (xz\cos(xyz)\,,\, -yz\cos(xyz)+xye^z\,,\, 2xe^{x^2+y^2}-xe^z)$; $\nu(x, y, x^2+y^2) = (-2x, -2y, 1)/(1+4x^2 + 4y^2)^{1/2}$; 0]

## 5.42

Si considerino:

- La superficie orientata $(S, \nu)$, dove $S$ è il grafico della funzione
$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2}, \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$$
e $\nu$ è il campo normale a $S$ avente la terza componente positiva;
- Il campo vettoriale
$$(x, y, z) \mapsto (yz, yz, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è $-\pi/2$]

## 5.43

Si considerino:

- La superficie orientata $(S, \nu)$, con

$$S := \{(x, y, 1) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

  e

$$\nu : S \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, 1);$$

- Il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + x).$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è $-3\pi$]

## 5.44

Sia $E$ il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$. Inoltre sia $\tau$ il campo di vettori unitari che orienta positivamente $\partial E$. Usare il teorema di Green per calcolare l'integrale

$$\int_{(\partial E, \tau)} (x \ln(1 + y), x + y).$$

[$\frac{\ln 2}{2}$]

## 5.45

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (yz, -xz, z(x^2 + y^2)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semipalla

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

Usare il teorema della divergenza di Gauss per calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2) \, dxdydz = \int_E \operatorname{div} F \, dxdydz.$$

[ $4\pi/15$]

## 5.46

Si considerino

- la calotta sferica
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z \geq 1\}$$
orientata dal campo normale ascendente ($N_3 > 0$);
- il campo di vettori
$$F(x, y, z) := (y + \ln(1 + x^2)\,,\ z + \ln(1 + y^2)\,,\ x + \ln z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty).$$

Verificare la formula di Stokes.

## 5.47

Si considerino (nel piano):

- La spirale di Archimede $C_1$ parametrizzata da $\gamma(t) := (t \cos t, t \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$;
- Il segmento $C_2$ congiungente l'origine al punto $(2\pi, 0)$;
- La regione limitata $E$ tale che $\partial E = C_1 \cup C_2$.

Usare la formula di Green per calcolare l'area di $E$.

[$4\pi^3/3$]

## 5.48

- Calcolare $\operatorname{rot} F$, dove
$$F(x, y, z) := (-xy^2, x^2 y, xy \cos z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$
- Usare il teorema di Stokes per calcolare l'integrale
$$\int_S (x^2 \cos z - y^2 \cos z + 4xyz)\, d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$
dove
$$S := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\big\}\,.$$

[1/2]

## 5.49

Si considerino la funzione

$$f(x) := (2 + \cos x) \sin x, \quad x \in [0.\pi]$$

e il campo di vettori

$$F(x, y) := (y - 2 \sin x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Inoltre siano $C$ e $E$, rispettivamente, il grafico di $f$ e il sottografico di $f$. Infine, sia $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ l'orientazione di $C$ tale che $\tau_1 < 0$. Applicare il teorema di Green (relativamente alla coppia $E, F$) per calcolare

$$\int_{(C,\tau)} F.$$

[0]

## 5.50

Si considerino

- Il disco $D$ ottenuto dall'intersezione della palla unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^3$ con il piano $z = -y$;
- Il campo continuo $N$ di vettori normali a $D$ (che quindi orienta $D$) tale che $N_3 > 0$;
- Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x, y, z) := (x + y + z, x^2, x^2).$$

Rappresentare graficamente $D$ e verificare che vale la formula di Stokes.

[I due membri della formula sono uguali a 0]

## 5.51

Sia $E$ l'insieme definito in Esercizio 1.81, sia $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il seguente campo di vettori

$$F(x, y, z) := (xz, -yz, (z - 1)(x^2 + y^2)^{1/2}), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

e sia $N$ il campo normale esterno alla frontiera $\partial E$. Inoltre sia

$$\Gamma_1 := \{(x, y, z) \in \partial E \,|\, z = 1\}, \quad \Gamma_2 := \{(x, y, z) \in \partial E \,|\, z = 2\}$$

e

$$S := \partial E \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2).$$

Calcolare gli integrali

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2, \quad \int_{\Gamma_2} F \cdot N \, d\mathcal{H}^2.$$

Usare poi questi due risultati, il risultato di Esercizio 1 e il teorema della divergenza per calcolare

$$\int_S F \cdot N \, d\mathcal{H}^2.$$

[$\int_{\Gamma_1} F \cdot N d\mathcal{H}^2 = 0$, $\int_{\Gamma_2} F \cdot N d\mathcal{H}^2 = 14\pi/3$, $\int_S F \cdot N d\mathcal{H}^2 = -119\pi/48$.]

## 5.52

Rappresentare graficamente la curva piana parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con

$$\gamma(t) = (\rho(t) \cos t, \rho(t) \sin t), \qquad \rho(t) := 2 + \cos(4t).$$

Usare il teorema di Green per calcolare l'area della regione piana limitata avente tale curva come frontiera.

[$9\pi/2$]

## 5.53

Sia $E$ l'intersezione fra il cilindro di equazione $x^2+y^2 \leq 1$ e il piano di equazione $y+z = 0$. Indicata con $\tau$ un'orientazione (scelta a piacere) di $\partial E$, calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau)} (z, x, y).$$

Servirsi di questo risultato e del teorema di Stokes per calcolare $\mathcal{H}^2(E)$.

[$2\pi; \pi\sqrt{2}$]

## 5.54

Indicato con $D$ il disco di raggio 1 centrato nell'origine del piano $xy$, sia

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \, 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Si consideri inoltre il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x, y, z^2).$$

- Rappresentare graficamente $E$;
- Calcolare $\int_E \mathrm{div} F \, dL^3$;
- Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso ascendente di $F$ attraverso il grafico della funzione $D \ni (x,y) \mapsto 2 - x^2 - y^2$.

[$\int_E \mathrm{div} F \, dL^3 = 16\pi/3$, Il flusso ascendente cercato vale $10\pi/3$]

## 5.55

Definiamo

$$E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1],\ y \in [-x^2, x^2]\},$$
$$E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1\}$$

e

$$E := E_1 \cup E_2.$$

Rappresentare graficamente l'insieme $E$ e usare la formula di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau)} \left(-y(x-1)^2 + \ln(1+x)\,,\ xy^2 + \cos y\right)$$

dove $\tau$ è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente $\partial E$.

[$\frac{17}{105} + \frac{\pi}{4}$]

## 5.56

Si considerino:

- La superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 \leq 1,\ y = x^2\}$;
- Il campo $N$ normale a $S$ tale che $N_2 > 0$;
- Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $F(x,y,z) := (-z, y + z^2, x)$.

Usare il teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{(S,N)} \mathrm{rot}\, F.$$

[$-2\pi$]

## 5.57

Sia $E$ l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$z = y\sqrt{3}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0,$$

e si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (0, x, 0), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Rappresentare graficamente $E$;
- Verificare la validità della formula di Stokes

$$\int_{(E,\nu)} \operatorname{rot} F = \int_{(\partial E,\tau)} F \tag{5.1}$$

  scegliendo a piacere l'orientazione (fra le due possibili).

[Gli integrali in (5.1) valgono entrambi $\pi$]

# Chapter 6

# Potenziale di un campo vettoriale

## 6.1

Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y) := \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)$$

è conservativo in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ e, in caso affermativo, scriverne un potenziale. Dire infine se $F$ è conservativo nel suo dominio di esistenza $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \neq 0\}$.

$\left[\text{sì; } \frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right]$

## 6.2

Si consideri il campo vettoriale piano

$$F(x,y) := (\,\sin(x+y) + x\cos(x+y)\,,\, x\cos(x+y)).$$

Stabilire se esso è conservativo in $\mathbb{R}^2$ ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

## 6.3

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) := (z\,,\, 3z\,,\, x+3y).$$

Stabilire se esso è conservativo in $\mathbb{R}^3$ ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

[sì; $z(x+3y)$]

## 6.4

Provare che il campo vettoriale

$$F(x,y) := (e^x(1+x-y)\,,\, -e^x)$$

è conservativo. Determinarne il potenziale che si annulla nell'origine.

## 6.5

Dimostrare che il campo

$$F(x,y) := (e^y - ye^x\,,\, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove $C$ è una curva qualsiasi avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

[0]

## 6.6

Sia

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \pi \ \text{ e } \ 0 \le y \le \sin x\}, \qquad \overline{F}(x,y) := (x, y^2)$$

e denotiamo con $C$ la parte di $\partial D$ costituita dall'arco di sinusoide percorsa "da sinistra a destra".

- Usando il teorema di Gauss, calcolare il flusso di $\overline{F}$ attraverso $\partial D$ (uscente da $D$).
- Stabilire se il campo $\overline{F}$ è conservativo.
- Calcolare

$$\int_C x\,dx \,+\, y^2\,dy.$$

## 6.7

Dimostrare che il campo

$$F(x,y) := (e^y - ye^x\,,\, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove $C$ è una curva qualsiasi avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

## 6.8

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x,y) := \big(-2(y+1)x^{-3}, x^{-2}\big)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinare un potenziale di $F$.

## 6.9

Determinare l'insieme di esistenza del campo

$$F(x,y) := \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

Stabilire se $F$ è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

## 6.10

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{2}{x-\frac{y}{x}}\,;\,\frac{1}{y-x^2}\right)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

## 6.11

Dimostrare che il campo di vettori

$$(x,y) \mapsto \left(\ln y - \frac{y}{x}\,,\,\frac{x}{y} - \ln x\right), \qquad (x,y) \in (0,+\infty)^2$$

soddisfa CIP. Determinarne il potenziale $\varphi$ tale che $\varphi(1,1)=0$ e verificare che $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

## 6.12

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) := \left(\frac{y^2+xy+1}{x+y}\,,\,\frac{x^2+xy+1}{x+y}\right), \qquad x+y \neq 0.$$

(i) Dimostrare che $F$ è conservativo;

(ii) Sia $\varphi$ un potenziale di $F$ e sia

$$\psi(x,y) := -\frac{x^2+y^2}{2} + x + y, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Dire in quali punti la funzione complessa $\varphi + i\psi$ è olomorfa.

## 6.13

Descrivere il dominio (massimale) di esistenza del campo

$$F(x,y) := \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), -\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Stabilire se $F$ è conservativo. Nel caso che lo sia, se ne determini la famiglia dei potenziali.

## 6.14

Determinare $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2)$, sapendo che essa è potenziale del campo vettoriale

$$F(x,y) := (2x\varphi(x,y), \varphi(x,y))$$

e che $\varphi(0,0) = 1$. Determinare poi

$$\int_{\overline{C}} F \bullet ds$$

dove $\overline{C}$ è il grafico della funzione

$$x \mapsto x + \sin x, \qquad x \in [0,\pi]$$

orientato di modo che $(0,0)$ sia il punto iniziale.

## 6.15

Determinare un campo $F$ con potenziale

$$\Phi(x,y) := x - 3y + x^2, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Esistono altri campi con lo stesso potenziale? Motivare la risposta. Calcolare infine

$$\int_P F$$

dove $P$ é la poligonale congiungente, nell'ordine, i punti:

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (0,2), \quad (3,3), \quad (0,4), \quad (5,5), \quad (0,6), \quad (7,7), \quad (0,8).$$

[No; $-24$]

## 6.16

Stabilire se il campo

$$F(x,y) := \frac{(y,-x)}{(y-x)^2}, \qquad x \neq y$$

è conservativo. Calcolare

$$\int_{\overline{C}} F$$

dove $C$ è il grafico della funzione

$$x \mapsto x \sin x, \qquad x \in [0, 4\pi]$$

e l'orientazione è scelta di modo che l'origine sia il punto iniziale.

[Campo conservativo; 0]

## 6.17

Calcolare

$$\int_{\overline{S} \cup \overline{C}} F$$

dove

- $\overline{S}$ è il segmento orientato avente $(1,1,0)$ come punto iniziale e $(1,0,0)$ come punto finale;
- $\overline{C}$ è il quarto di circonferenza, nel piano $x = 1$, di centro $(1,1,0)$ e orientato in modo tale che $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$ ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- $F$ è il campo vettoriale

$$(x,y,z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2}\,,\, \frac{1}{x}\,,\, 1\right).$$

$\big[1 \quad \big(\text{un potenziale è dato da } \frac{y}{x} + z\big)\big]$

## 6.18

Considerato il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\,,\, \frac{y+\alpha}{1+x^2+y^2}\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

determinare un valore di $\alpha$ per cui si abbia

$$\int_C F = 0$$

per ogni circonferenza $C$ centrata nell'origine e percorsa in senso orario.

[0]

## 6.19

Stabilire per quali valori di $\alpha$ il campo

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{\alpha + (1-\alpha)x}{x + e^{-y}}, \frac{1 - \alpha + \alpha x}{x + e^{-y}} \right)$$

risulta conservativo nel primo quadrante del piano cartesiano.

[1]

## 6.20

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) := (2x|y|, x^2).$$

- Determinare un potenziale di $F$ in $(0, +\infty)^2$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di $F$ in $(0, +\infty) \times (0, -\infty)$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di $F$ di classe $C^2$ in un insieme aperto contenente almeno un punto della retta $y = 0$.

$\left[x^2 y;\ \text{non esiste};\ \text{non esiste}\right]$

## 6.21

Determinare un potenziale del campo vettoriale

$$F(x, y) := \left( \frac{xy^2}{xy - 1}, \frac{x^2 y}{xy - 1} \right), \quad (x, y) \in A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$$

dopo averne dimostrato l'esistenza.

$[xy + \ln|xy - 1|]$

# Chapter 7

# Analisi complessa

## 7.1

Data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 - i},$$

determinarne il campo di esistenza. Stabilire poi dove $f$ è derivabile e calcolare $f'(z)$ nei punti dove esiste.

## 7.2

Dire se la funzione

$$f(z) := \bar{z} = x - iy$$

ha una primitiva. Calcolare

$$\int_C f(z)\, dz$$

dove $C$ è il segmento che congiunge 0 a $1 + i$, orientato in modo che 0 ne sia il punto iniziale.

## 7.3

Calcolare

$$\int_C \frac{\sin z}{(z - 2i - 1)^5} dz$$

nei seguenti casi:

- $C$ è la circonferenza di raggio 4 e centro l'origine, percorsa in senso antiorario;

- $C$ è il bordo del rettangolo avente per diagonale il segmento di estremi 0 e $2+i$, percorso in senso antiorario.

## 7.4

Sia data la funzione complessa
$$f(z) := \frac{1}{z-i}.$$

- Esiste un semipiano nel quale $f$ ha una primitiva?
- In caso affermativo, determinare una di tali primitive.

## 7.5

Calcolare
$$\int_C f(z)\, dz$$
dove $f$ è la funzione dell'esercizio 7.4, mentre $C$ è la circonferenza di raggio 2 e centro $i$, percorsa in senso antiorario.

## 7.6

Verificare che
$$u(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$$
è armonica in $\mathbf{C}\backslash\{(0,0)\}$. Determinare una funzione armonica coniugata di $u$.

## 7.7

Si considerino le curve
$$C_1 := \{(x,0) \mid x \in [-2,2]\}, \qquad C_2 := \{(x,y) \mid y \geq 0,\ x^2+y^2=4\}$$
orientate in modo che $(-2,0)$ è il punto iniziale di $C_1$, mentre $(2,0)$ è il punto iniziale di $C_2$. Calcolare
$$\int_{C_1} \frac{2}{z-i} dz, \qquad \int_{C_1 \cup C_2} \frac{2}{z-i} dz$$

(per quest'ultimo usare la formula di Cauchy) e servirsi dei risultati così ottenuti per ricavare

$$\int_{C_2} \frac{2}{z-i} dz.$$

## 7.8

Servirsi delle condizioni di Cauchy-Riemann per verificare che l'integrale

$$\int_C ze^z \, dz$$

dove $C$ è una qualsiasi curva orientata nel piano complesso, non dipende completamente da $C$ ma solo dai suoi punti estremi. Calcolare tale integrale nel caso che $C$ abbia $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,1)$ come punto finale.

## 7.9

Si consideri la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x,y) := x^2 - y^2 - x.$$

Verificare che $u$ è armonica. Trovare una funzione olomorfa avente $u$ come parte reale.

## 7.10

Si consideri la funzione complessa di variabile complessa

$$f(z) := f(x+iy) := x^2 + i\,2xy.$$

Risolvere le seguenti questioni:

- Stabilire se $f$ è olomorfa in $\mathbf{C}$.
- Indicato con $C$ il segmento congiungente $(0,0)$ con $(2,1)$, si calcoli

  $$\int_C f(z) \, dz.$$

- Determinare una funzione reale $\varphi(y)$ in modo che

  $$g(z) := f(x+iy) + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y) + i\,2xy$$

  sia olomorfa in $\mathbf{C}$.

## 7.11

Determinare due numeri reali $a$ e $b$ di modo che la funzione

$$f(z) = f(x, y) = x^3 + axy^2 \; + \; i(bx^2y - y^3)$$

sia derivabile in $\mathbf{C}$. Calcolare poi $f'(z)$.

## 7.12

Si considerino le due poligonali $C_1$ e $C_2$ con lati paralleli agli assi e congiungenti l'origine al punto $(x, y) \in \mathbf{C}$. Si calcolino gli integrali

$$I_1 := \int_{C_1} f(z)\, dz, \qquad I_2 := \int_{C_2} f(z)\, dz$$

dove $f$ è la funzione definita nell'esercizio 7.11. Trovare $a$ e $b$ tali che $I_1 = I_2$.

<u>Facoltativo:</u> individuare e argomentare la relazione fra le conclusioni di questo esercizio e dell'esercizio 7.11.

## 7.13

Data la funzione complessa

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x \; + \; 2i(x + 1)y$$

si calcoli

$$\int_C f(z) dz$$

dove $C$ è il segmento che conduce dall'origine al punto $(1, 1)$. Infine, si verifichi che $f$ soddisfa $\text{CIP}_{\mathbf{C}}$.

## 7.14

Data la funzione

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - 2x,$$

si determini una nuova funzione $v(x, y)$ tale che $u + iv$ sia analitica in $\mathbf{C}$.

## 7.15

Si consideri la funzione complessa

$$f(z) := \frac{z}{z-i}.$$

Stabilire (motivando le risposte):

- In quali punti di $\mathbf{C}$ la funzione $f$ è derivabile.
- Se esiste una primitiva di $f$ in $\mathbf{C}\backslash\{i\}$.

## 7.16

Data la funzione

$$f(z) := x^2 - y^2 - x - iy(1-2x), \qquad z = x + iy \in \mathbf{C}$$

affrontare le seguenti questioni.

- Dimostrare che $f$ soddisfa CIP;
- Si scelga una curva $C$ congiungente 0 a $2+i$ e si calcoli quindi $\int_C f(z)dz$;
- Verificare che il Teorema fondamentale del calcolo in $\mathbf{C}$ produce lo stesso risultato a cui si è pervenuti nel punto precedente.

## 7.17

Calcolare

$$\int_C ze^z\, dz$$

dove $C$ è la semicirconferenza $\{(x,y) \in \mathbf{C} \,|\, x^2 + y^2 = 1,\, x \geq 0\}$, percorsa in senso antiorario.

## 7.18

Determinare $f(y)$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$ e

$$u(x,y) := f(y) - x^2 y$$

sia armonica. In seguito, determinare una funzione armonica coniugata ad $u$.

## 7.19

Data la curva piana

$$C := \{x + iy \,|\, y = 1 + x,\ -1 \le x \le 0\} \cup \{x + iy \,|\, y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1\}$$

calcolare

$$\int_C e^{iz} z^2 \, dz$$

con entrambi i versi di percorrenza possibili per $C$.

## 7.20

Verificare che la funzione

$$u(x, y) := e^{2x}(2\cos^2 y - 1), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

è armonica. Usare gli integrali curvilinei per determinare la funzione armonica ad essa coniugata e nulla nell'origine.

## 7.21

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(z) = f(x, y) := e^{y+ix}, \qquad (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Determinare l'integrale

$$\int_C f(z)\, dz$$

dove $C$ indica il segmento avente $i$ e $1 + i$ come punti iniziale e finale, rispettivamente.

[$f$ non è derivabile in nessun punto; $e \sin 1 + i\, e(1 - \cos 1)$]

## 7.22

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(x, y) := x^4 - y^3 + ix^2 y, \qquad (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Calcolare poi l'integrale di $f$ lungo l'arco di parabola $y = x^2$, avente $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 1)$ come punto finale.

[$f$ è derivabile in $(0, 0), (1/4, 0), (1/4, 1/6)$; $f'$ vale rispettivamente $0, 1/16, 1/16{+}i/12$; l'integrale vale -29/105 + 17i/60.]

## 7.23

Determinare un valore di $a$ per il quale la funzione

$$u(x,y) := e^{ax}\cos y \sin y, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

è armonica. Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di $u$.

$\left[-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2y)\right]$

## 7.24

Sia $C_\alpha$ la curva congiungente $(0,0)$ a $(1,1)$, definita come il grafico della funzione

$$t \mapsto t^\alpha, \qquad t \in [0,1]$$

dove $\alpha > 0$. Si consideri inoltre la funzione complessa

$$f(z) = f(x,y) := x^2 - y^2 + ax \, + \, i2y(x-1).$$

Determinare un valore di $a$ per il quale l'integrale

$$\int_{C_\alpha} f(z)dz$$

risulta non dipendere da $\alpha$.

$[-2]$

## 7.25

Determinare la funzione $g$ tale che

$$u(x,y) := x^2 + g(y) - 4x + 1$$

risulti armonica e soddisfi

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di $u$.

$[2xy - 4y]$

## 7.26

Verificare che la funzione

$$v(x,y) := e^x(x\cos y - y\sin y), \qquad (x,y)\in \mathbf{C}$$

è armonica. Determinare poi $u : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tale che $u + iv$ sia derivabile.

$[-e^x(x\sin y + y\cos y)]$

## 7.27

Scegliere $\alpha$ affinché la funzione complessa

$$f : z = x + iy \longmapsto \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2) + i\frac{y}{x}$$

sia derivabile in $1+i$. Per tale $\alpha$, determinare tutti i punti in cui $f$ è derivabile. Infine, posto $\alpha := 2$, calcolare

$$\int_{\overline{S}} f(z)dz$$

dove $\overline{S}$ è il segmento orientato di punto iniziale 1 e punto finale $1+i$.

$\left[-\frac{1}{2} + i\frac{4}{3}\right]$

## 7.28

Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto 2xy \; + \; i(x - y + x^2)$$

è derivabile.

$\left[-\frac{1}{4} - i\frac{1}{2}\right]$

## 7.29

Calcolare

$$\int_{\overline{C}} \overline{z}\, dz$$

dove $C$ è l'arco ottenuto intersecando la circonferenza di raggio 1 centrata in $(0,1)$ con il primo quadrante del piano cartesiano e l'orientazione è quella positiva.

$[2 + i\pi]$

## 7.30

Calcolare

$$\int_{\overline{S}\cup\overline{C}} F$$

dove

- $\overline{S}$ è il segmento orientato avente $(1,1,0)$ come punto iniziale e $(1,0,0)$ come punto finale;
- $\overline{C}$ è il quarto di circonferenza, nel piano $x=1$, di centro $(1,1,0)$ e orientato in modo tale che $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$ ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- $F$ è il campo vettoriale

$$(x,y,z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2}\,,\ \frac{1}{x}\,,\ 1\right).$$

$\big[D=(0,+\infty)^2\cup(-\infty,0)^2$; la funzione è derivabile in $(1,1)$ e in $(-1,-1)\big]$

## 7.31

Per ogni numero reale $a$, sia $D_a$ l'insieme dei punti in cui la funzione complessa $x+iy \mapsto xy + i(ax^2+y)$ è derivabile. Determinare $D_0$ e $D_{-1/2}$.

$\big[D_0=\{i\};\ D_{-1/2}=\{x+i\,|\,x\in\mathbf{R}\}\big]$

## 7.32

Sia $T$ il triangolo di vertici $-1,1,i$. Provare che la funzione

$$w \mapsto \int_{\partial T} \frac{3z^2-z+2}{(z-w)^3}dz$$

è costante all'interno di $T$.

$[6\pi i]$

## 7.33

Calcolare

$$\int_C e^{x-iy}dz$$

dove $C$ è il segmento congiungente 0 (punto iniziale) a $1+i$.

$\left[i(e^{1-i}-1)\right]$

## 7.34

Provare che la funzione complessa

$$(x,y) \mapsto \frac{\ln(1+x)}{y} + i(x^2-y^2) \qquad (x>-1,\ y\neq 0)$$

non è derivabile in alcun punto dell'asse $x=0$.

$\left[\text{Le condizioni di C-R in}(0,y)\text{si riducono a}y^2=-1\right]$

## 7.35

Determinare i punti del primo quadrante in cui la funzione complessa

$$x+iy \mapsto \frac{x}{x+e^{-y}} + i\frac{1}{x+e^{-y}}$$

è derivabile.

$\left[\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x>1,\ y=\ln x\}\right]$

## 7.36

Determinare

$$\alpha\in\mathbb{R}, \qquad v:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$$

tali che la funzione complessa

$$2x^3+\alpha xy^2+x^2-y^2-x-\alpha+1\ +\ iv(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{C}$$

è derivabile in $\mathbb{C}$.

$\left[\alpha=-6;\ v(x,y)=2xy+6x^2y-2y^3\right]$

## 7.37

Si consideri la famiglia di funzioni complesse di variabile complessa

$$f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z = x + iy \mapsto (\alpha + i)x - y$$

parametrizzata da $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i valori del parametro $\alpha$ per cui è nullo l'integrale di $f_\alpha$ lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Verificare che per tali valori di $\alpha$ la funzione $f_\alpha$ è derivabile in $\mathbb{C}$.

[0]

## 7.38

Discutere l'esistenza di primitive della funzione

$$f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_\alpha(x, y) := x^2 - y^2 \, + \, i\alpha xy$$

al variare di $\alpha$ in $\mathbb{R}$.

[Esiste primitiva se e solo se $\alpha = 2$]

## 7.39

Provare che una funzione complessa della forma $(x, y) \mapsto u(x, y) + iu(x, y)$ è derivabile se e solo se $u$ è costante su ogni componente connessa del dominio.

## 7.40

Provare che la funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \ln(1 + xy) \, + \, ixy$$

è derivabile soltanto in $(0, 0)$.

## 7.41

Supponiamo che la parte reale di una funzione complessa derivabile in $\mathbb{C}$ sia della forma

$$(x, y) \mapsto y \int_0^x g(t)\, dt$$

dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile. Provare allora che $g$ è costante.

## 7.42

Provare che la seguente funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \frac{(x + iy)(\cos y - i \sin y)}{e^x}, \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

è dotata di primitiva.

## 7.43

Provare che se $u + iv$ è una funzione derivabile in $\mathbb{C}$ allora vale l'uguaglianza

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = 0.$$

## 7.44

Calcolare

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{8z + 9i}\, dz$$

dove $C$ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

[0]

## 7.45

Stabilire in quali punti la funzione complessa

$$x + iy \mapsto \frac{x}{y} + iy$$

è derivabile. Calcolare il valore della derivata in questi punti.

$[\{i\}; 1]$

## 7.46

Si considerino la funzione complessa

$$f(x,y) := xy + i\frac{(x+y)^2}{2}, \qquad x+iy \in \mathbb{C}$$

e il segmento orientato $\overline{C}$ avente $(0,0)$ come punto iniziale e $(1,0)$ come punto finale. Determinare:

- i punti in cui $f$ è derivabile;
- l'integrale
$$\int_{\overline{C}} f(z)\,dz.$$

$\left[\{(0,0)\};\, \frac{i}{6}\right]$

## 7.47

Determinare i punti in cui la funzione complessa

$$x+iy \mapsto x\cos y\,(1+i\sin y), \quad x+iy \in \mathbb{C}$$

è derivabile.

$\left[\{((-1)^k, k\pi)\,,\,(0, k\pi+\pi/2)\,|\, k\in\mathbb{Z}\}\right]$

## 7.48

Sia $\Omega := (0,+\infty)^2$ e

$$u(x,y) := x + \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad (x,y)\in\Omega.$$

Verificare che $u$ è una funzione armonica. Determinare $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u+iv$ sia derivabile in $\Omega$.

$\left[u(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}\right]$

## 7.49

Sia $u$ la parte reale di una funzione complessa derivabile nel sottoinsieme aperto $\Omega$ di $\mathbf{C}$ e sia $E$ un sottoinsieme compatto di $\Omega$ con frontiera regolare a tratti. Provare che allora

$$\int_{\partial E} u\nabla u = 0.$$

## 7.50

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} (z-w)^2 dz, \qquad (w \in \mathbb{C}).$$

Verificare che $f$ è derivabile in $\mathbb{C}$ e calcolare $f'$.

$\left[f'(w) = w^2\right]$

## 7.51

Provare che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto xe^{ix}$$

non è derivabile in alcun punto.

## 7.52

Calcolare l'integrale complesso

$$\int_C 1 + i\sqrt{1-y^2}\, dz$$

dove $C$ è il grafico della funzione sin su $[-\pi/2, \pi/2]$, orientato di modo che $(-\pi/2, -1)$ ne sia il punto iniziale.

$[\pi/2 + i4]$

## 7.53

Provare che la funzione

$$u(x,y) := \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$$

è armonica. Determinare poi una funzione armonica coniugata di $u$.

$\left[\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}\right]$

## 7.54

Sia $\overline{\Gamma}$ la curva orientata (spirale) parametrizzata dalla mappa

$$t \mapsto i + te^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Calcolare

$$\int_{\overline{\Gamma}} \frac{1}{z^2}\, dz.$$

$\left[\frac{-2\pi}{1+4\pi^2} + i\frac{-4\pi^2}{1+4\pi^2}\right]$

## 7.55

determinare $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x, y) := \varphi(y) \sin x + i\psi(x)e^y, \qquad (x, y) \in \mathbb{C}$$

sia derivabile.

$[\psi(x) = \cos x,\ \varphi(y) = e^y]$

## 7.56

Determinare una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto x^3 - yf(x, y) \ + \ i[xf(x, y) - y^3]$$

sia derivabile in $\mathbb{C}$.

$[3xy]$

## 7.57

Usare il Teorema di rappresentazione integrale di Cauchy per calcolare

$$\int_C \frac{z}{z-i}\, dz$$

dove $C$ è la semicirconferenza parametrizzata da

$$\gamma(t) := 2(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

$[4 - 2 \operatorname{arctg} 2]$

## 7.58

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} \overline{z}\, dz, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Determinare i punti in cui $f$ è derivabile.

$[f(w) = |w|^2/2\,;\ f$ è derivabile solo in $0]$

## 7.59

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $x + iy \mapsto ax + by + x + y\ +\ i(ax + by)$ risulti derivabile in $\mathbb{C}$.

$[a = -1, b = 0]$

## 7.60

Sia

$$u(x, y) := e^x(x \cos y - y \sin y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che esiste una funzione $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $u + iv$ è derivabile in $\mathbb{C}$. Determinare un'espressione esplicita del campo normale $N$ al grafico di $v$ tale che $N_3 > 0$.

## 7.61

Siano dati un sottoinsieme aperto $\Omega$ di $\mathbb{R}^2$ e due funzioni $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $u$ e $v$ sono costanti in ogni componente connessa di $\Omega$;

(ii) $u + iv$ e $v + iu$ sono derivabili.

## 7.62

Sia $C$ un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto $A$ la cui frontiera ha misura nulla e siano $u, v : C \to \mathbb{R}$ tali che:

(i) la mappa $\Phi := (u, v) : C \to \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema del cambiamento della variabile nell'integrale;

(ii) $u + iv$ è derivabile in $A$.

Provare che

$$m_2(\Phi(A)) = \frac{1}{2}\int_A (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2).$$

## 7.63

Per ogni $w \in \mathbb{C}$, sia $f_w$ la funzione complessa definita come segue:

$$f_w(x, y) := wy - w^2 x, \qquad (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Provare che $f_w$ è derivabile in $\mathbb{C}$ se e soltanto se $w = 0$ oppure $w = i$.

## 7.64

Determinare

$$\int_{\overline{C}} z^3\, dz$$

dove $\overline{C}$ è l'arco di parabola parametrizzato da

$$\gamma(t) := t(2 - t) \, + \, it, \qquad t \in [0, 2].$$

[4]

## 7.65

Descrivere la famiglia delle funzioni $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$u(x, y) := x^2 - 2x - p(y). \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$. Data una $p$ siffatta, determinare le funzione armoniche coniugate di $u$ che valgono zero nell'origine.

[$p(y) = y^2 + ay + b,\ v(x, y) = 2xy - 2y + ax$ (con $a, b \in \mathbb{R}$)]

## 7.66

Determinare $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tale che la funzione

$$u(x,y) := y\varphi(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

sia armonica e soddisfi $u(1,1) = 2$, $u(0,1) = 0$. Determinare un'armonica $v$ coniugata di $u$.

[$\varphi(x,y) = 2x$, $v(x,y) = y^2 - x^2$]

## 7.67

Determinare una funzione derivabile $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che la funzione complessa

$$z = x + iy \mapsto f(z) := x^3 - x\varphi(y) \; + \; i(y\varphi(x) - y^3)$$

risulti derivabile in ogni punto di $\mathbb{C}$. Calcolare poi

$$\int_{\overline{C}} f(z)\, dz$$

dove $\overline{C}$ è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con $x, y \geq 0$, orientata in senso antiorario.

[$\varphi(t) = 3t^2$, 0]

## 7.68

Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la derivabilità della funzione $F_\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita da

$$F_\alpha(w) := \int_{[0;w]} f_\alpha(z)\, dz \qquad (w \in \mathbf{C})$$

dove $[0; w]$ è il segmento orientato congiungente 0 (punto iniziale) e $w$, mentre $f_\alpha(z) = f_\alpha(x+iy) := x + i\alpha y$.

[Se $D_\alpha$ indica l'insieme dei punti in cui $F_\alpha$ è derivabile, si ha: $D_1 = \mathbf{C}$ e $D_\alpha = \{0\}$ per ogni $\alpha \neq 1$].

## 7.69

Studiare, per $\rho \in (0, +\infty)\setminus\{1\}$ e $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, la funzione complessa

$$\varphi(\rho, k) := \int_{C_\rho} \frac{(z+i)^2}{(z-i)^k} dz$$

dove $C_\rho$ è la circonferenza di raggio $\rho$ centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

[$\varphi = 0$ su $(0,1) \times \{1,2,\ldots\}$; $\varphi = 0$ su $(1,+\infty) \times \{4,5,\ldots\}$; inoltre, per $\rho > 1$: $\varphi(\rho,1) = -8\pi i$, $\varphi(\rho,2) = -8\pi$, $\varphi(\rho,3) = 2\pi i$]

## 7.70

Descrivere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $D_\alpha$ dei punti in cui la funzione complessa

$$\mathbb{C} \ni x + iy \longmapsto \alpha xy \, + \, i(\alpha x^2 - y^2)$$

è derivabile. Calcolare l'integrale complesso di tale funzione sul segmento che congiunge l'origine (punto iniziale) e $2+i$.

[$D_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $D_{-2} = \{0\} \times \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{(0,0)\}$ se $\alpha \neq 0, -2$; $\frac{1}{3} + \frac{10\alpha - 2}{3} i$]

# Chapter 8

# Formula di Taylor, massimi e minimi di funzione

## 8.1

Trovare (dopo averne motivato l'esistenza) il minimo della funzione

$$f(x, y, z) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

soggetta al vincolo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

## 8.2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 2x)$$

e si affrontino le seguenti questioni:

- determinare e classificare i punti critici di $f$;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nel disco chiuso di raggio 3 centrato nell'origine e, in caso affermativo, ricavarli;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di $f$ in $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, ricavarli;
- si può ricondurre la particolare simmetria dell'insieme dei punti critici a qualche simmetria di $f$ ?

## 8.3

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) := x^2y - (x+y)^2$$

e classificare quelli diversi da $(0,0)$.

## 8.4

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x,y) := x^3 + xy^2 - 2xy$$

nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.

## 8.5

Classificare gli eventuali punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := (x+y^2)e^x.$$

Dire se $f$ ha massimo assoluto. Determinare il minimo assoluto di $f$ nel disco chiuso di raggio 1 centrato in $(0,0)$.

## 8.6

Sia $C$ il cono di equazione

$$z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

- Determinare esplicitamente la distanza $d(x,y)$ del punto $(1,1,0)$ dal punto di $C$ avente $(x,y,0)$ come ombra.
- Verificare che il grafico della funzione

  $$f(x,y) := d^2(x,y)$$

  è convesso in ogni suo punto.
- Dimostrare che $f$ ha un unico punto stazionario $P_0(x_0,y_0)$ e che questo è di minimo assoluto.
- Verificare che il vettore

  $$(1,1,0) - (x_0, y_0, \sqrt{x_0^2+y_0^2})$$

  è perpendicolare a $C$ nel punto $(x_0, y_0, \sqrt{x_0^2+y_0^2})$.

## 8.7

Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(2 + xy)$$

se ne scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine con "punto iniziale" in $(0, 0)$. Studiare la forma del grafico di $f$ nel punto $(0, 0, \ln 2)$.

## 8.8

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := x^2 + 6xy + 2y^2$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine. In caso affermativo, determinarne i valori.

## 8.9

Studiare i massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + xy)$$

nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

## 8.10

Data la funzione

$$f(x, y) := e^{y-2x},$$

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico $G$ di $f$ nel punto $(1, 2, 1)$. Descrivere infine la forma di $G$ nello stesso punto (convesso, concavo, a sella).

## 8.11

Studiare i massimi e i minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy$$

ristretta all'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \;\; 0 \le x < 1\}.$$

## 8.12

Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) := \frac{x^2 - 3y^2 + 8xy}{2 - x^2 - y^2}$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine e quindi determinarne i valori.

## 8.13

Data la funzione

$$f(x,y) := \sin(xy + x^3 + y^3), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

determinare la forma del grafico di $f$ nel punto $(0,0,0)$.

## 8.14

Data la funzione

$$f(x,y) := \ln(1 + x^2 + y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado con "punto iniziale" in $(1,1)$. Calcolare il valore di tale polinomio in $(0,0)$.

## 8.15

Considerata la funzione

$$(x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

verificare che si ha

$$\min_{S^1} f + \max_{S^1} f = 1.$$

## 8.16

Scrivere la formula di Taylor della funzione

$$f(x,y) := \cos(x + y^3 + y + x^5 y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

nel punto $(0,0)$ e stabilire in tal punto la forma del grafico di $f$.

## 8.17

Provare che la funzione

$$\varphi(x, y, z) := x - y + z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ristretta all'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1$$

ha massimo e minimo assoluti. Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per determinarli.

[Il valore minimo di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ è -1, conseguito nel punto $(0, 1, 0)$; Il valore massimo di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ è $5/3$, conseguito nel punto $(2/3, -1/3, 2/3)$]

## 8.18

Si consideri la funzione

$$f(x, y) := \frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{xy}, \quad (x, y) \in [1, 2] \times [1, 2].$$

- Provare che $f$ ha massimo e minimo;
- Determinare il massimo e il minimo di $f$ e i punti in cui questi valori sono conseguiti.

[$\min f|_{\partial Q} = -\frac{1}{4}$ e $\max f|_{\partial Q} = 0$. Inoltre $\max f = 0$ e $\min f = -1/4$. La funzione $f$ assume il valore minimo $-1/4$ in $(1, 2)$, in $(2, 1)$ e nei punti dell'arco di iperbole $\{(x, y) \in Q^\circ | xy = 2\}$. La funzione $f$ assume il valore massimo 0 in $(1, 1)$.]

# Chapter 9

# Serie di Fourier, spazi $L^p$

## 9.1

Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Scrivere l'espressione dei coefficienti $\alpha_k[f]$, relativi allo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni.
- Descrivere la convergenza di $F_c[f]$ e disegnare il grafico di quest'ultima.
- Dare un esempio di intervallo sul quale $F_c[f]$ converge <u>uniformemente</u>.

## 9.2

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Scrivere l'espressione dei coefficienti di Fourier $\beta_k[f]$, relativi alla serie di soli seni. Discutere la convergenza puntuale della serie stessa e, infine, dare un esempio di intervallo sul quale la convergenza è uniforme.

## 9.3

Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

scriverne la serie di Fourier di soli seni e dire come questa converge alla funzione stessa.

## 9.4

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determinarne poi la serie di Fourier e dire come questa converge alla funzione stessa.

## 9.5

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione coseno e discuterne la convergenza.

## 9.6

Sia data la funzione

$$f : [0, \pi] \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \pi - x.$$

Determinare l'espressione dei coefficienti di Fourier $\alpha_k[f]$, relativi alla serie di soli coseni e discutere la convergenza della serie stessa.

## 9.7

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -\pi + x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \\ \pi + x & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di $f$ e discuterne la convergenza.

$[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)]$

## 9.8

Si considerino le due funzioni $2\pi$-periodiche $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se $f$ e $g$ siano o meno regolari a tratti;
- Elencare le proprietà relative alla convergenza delle serie di Fourier di $f$ e di $g$, in base a quanto stabilito nel punto precedente e alla teoria della serie di Fourier svolta nel corso.

[ $f$ non è r.a.t.; $g$ è r.a.t.; (siano $\Sigma_f$ e $\Sigma_g$, risp. la serie di F. di $f$ e la serie di F. di $g$) $\Sigma_g$ converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$ (quindi anche uniformemente, puntualmente, in $L^2(-\pi, \pi)$); $\Sigma_f$ converge in $L^2(-\pi, \pi)$ a $f|_{(-\pi,\pi)}$; $\Sigma_f$ converge puntualmente q.o. a $f$ ]

## 9.9

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi/2) \\ \\ 0 & \text{se } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

e descriverne le proprietà di convergenza.

[$b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$, $b_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}$; La serie di Fourier di $f$ converge a $f$ in $L^2$ e puntualmente ovunque. Indicando con $S(x)$ la somma della serie in $x$, si ha: $S(x) = x$ se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $S(x) = 0$ se $x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, $S(-\pi/2) = -\pi/4$, $S(\pi/2) = \pi/4$.]

## 9.10

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni $2\pi$-periodiche tali che:

- La funzione $f$ è pari e $f(t) = t^{3/4}$ per ogni $t \in [0, \pi]$;
- La funzione $g$ è dispari e $g(t) = t^{-1/4}$ per ogni $t \in [0, \pi]$.

Verificare che $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Inoltre, indicati con $a_n$ i coefficienti della serie di Fourier di $f$ (soli coseni!) e con $b_n$ i coefficienti della serie di Fourier di $g$ (soli seni!), provare che vale l'identità

$$a_n = -\frac{3}{4n} b_n \qquad (n = 1, 2, ...).$$

## 9.11

In riferimento alla serie di Fourier della funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \\ \cos x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

calcolarne i coefficienti $a_n$ (per $n \geq 0$) e descriverne la convergenza.

[$a_0 = -2/\pi$ ; $a_1 = 1/2$ ; $a_n = 2/(n^2 - 1)\pi$ se $n \geq 2$ è pari; $a_n = 0$ se $n \geq 2$ è dispari.]

## 9.12

Provare che:

- Non esistono polinomi di primo grado propri (i.e. $bx + c$ con $b \neq 0$) ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$;
- Un polinomio di secondo grado proprio (i.e. $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$) è ortogonale alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$ se e solo se $b = 0$.

Infine:

- Determinare gli elementi della famiglia $\{\cos^k x, \sin^k x\}_{k=1}^{+\infty}$ che sono ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$.

[ Ultimo punto: Gli elementi della famiglia assegnata sono tutti ortogonali a $\sin x$, eccetto le funzioni $\sin^k x$ con $k$ dispari ]

## 9.13

Descrivere la convergenza della serie di Fourier della funzione $2\pi$-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

[ Convergenza puntuale: a $f(x)$ se $x \neq k\pi$, a $3/2$ se $x = 2k\pi$, a $1$ se $x = (2k+1)\pi$. Inoltre la serie di Fourier converge in $L^2(-\pi, \pi)$ e non converge in $L^\infty(\mathbf{R})$. ]

## 9.14

Scrivere la serie di Fourier della funzione $2\pi$-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) := \begin{cases} \pi & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ -x & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\pi & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

e discutere in seguito la convergenza di tale serie.

[ Convergenza puntuale: a $f(x)$ se $x \neq k\pi/2$, a $0$ se $x = k\pi$, a $3\pi/4$ se $x = 2k\pi - \pi/2$, a $-3\pi/4$ se $x = 2k\pi + \pi/2$. Inoltre la serie di Fourier converge in $L^2(-\pi, \pi)$ e non converge in $L^\infty(\mathbf{R})$. ]

## 9.15

Ricavare la serie di Fourier della funzione $|\sin|$ e descrivere le sue proprietà di convergenza.

[ $\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kx)$; converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$, quindi anche uniformemente in $\mathbb{R}$, puntualmente in $\mathbb{R}$ e in $L^2(-\pi, \pi)$. ]

## 9.16

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione dispari e $2\pi$-periodica tale che

$$f(t) = \min\{\pi/2\,,\, \pi - t\}, \quad t \in (0, \pi].$$

Relativamente alla serie di Fourier di $f$, determinarne i coefficienti e descriverne le proprietà di convergenza.

[*Convergenza:* Converge incondizionatamente a $f$ in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Posto $D := \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e indicata con $S$ la somma della serie di Fourier, si ha $S|_{\mathbb{R}\setminus D} = f|_{\mathbb{R}\setminus D}$ e $S|_D = 0$. Converge uniformemente a $f$ negli insiemi del tipo $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi + \varepsilon)$ con $\varepsilon \in (0,\pi)$.
*Coefficienti:* $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. $b_n = 1/n$ per ogni $n \geq 1$ pari. $b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}$ per ogni $k \geq 0$.]

## 9.17

Si consideri la funzione pari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(t) = \max\left\{\frac{\pi}{2} - t, 0\right\}, \qquad t \in [0,\pi].$$

Dopo aver tracciato il grafico di $f$, calcolare i coefficienti e descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di $f$.

[*Convergenza:* Converge incondizionatamente a $f$ in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Converge uniformemente a $f$.
*Coefficienti:* $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. $a_0 = \pi/4$. Se $n \geq 1$ è dispari allora $a_n = 2/(\pi n^2)$, mentre $a_{2k} = (1 - (-1)^k)/(2\pi k^2)$ per ogni $k \geq 1$.]

## 9.18

Tracciare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari, $2\pi$-periodica e tale che

$$f(t) = t\chi_{[0,\pi/2]}(t) + \pi\chi_{(\pi/2,\pi]}, \text{ se } t \in [0,\pi].$$

Ricavare i coefficienti della serie di Fourier relativa a $f$ e descrivere la convergenza di tale serie.

[*Coefficienti:* $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. $a_0 = 5\pi/4$.
Se $k \geq 1$, allora $a_{2k-1} = \frac{(-1)^k}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2}$ e $a_{2k} = \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}$.
*Convergenza:* Converge incondizionatamente a $f$ in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $S$ così definita:

$$S(x) := f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$S\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) := 3\pi/4 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-\pi/2, \pi/2)$ e in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. ]

## 9.19

Per $x \in (-\pi, \pi)$, definiamo

$$f_1(x) := \cos x + \sin 2x, \qquad f_2(x) := \sin 2x - \cos x + \cos 7x$$

$$f_3(x) := 2\cos 7x - \sin 2x + \cos x.$$

Indicata con $\|\cdot\|_2$ la norma di $L^2(-\pi, \pi)$, calcolare $\|f_1\|_2$, $\|f_2\|_2$, $\|f_3\|_2$ e dimostrare che la famiglia

$$\left\{ \frac{f_1}{\|f_1\|_2}, \frac{f_2}{\|f_2\|_2}, \frac{f_3}{\|f_3\|_2} \right\}$$

è ortonormale e non è completa in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$.

[HINT: La famiglia $\{f_i/\|f_i\|_2\}_{i=1,2,3}$ non è completa: se lo fosse, dalle identità $(f_i/\|f_i\|_2, \sin x)_2 = 0$, per $i = 1, 2, 3$, seguirebbe la conclusione assurda che $\sin x = 0$]

## 9.20

Tracciare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari, $2\pi$-periodica e tale che

$$f(x) = \min\{x, \pi - x\}, \text{ se } x \in (0, \pi].$$

Ricavare l'espressione della serie di Fourier relativa a $f$ e descrivere la convergenza di tale serie.

[$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi} \sin(2k+1)x$; La serie converge uniformemente a $f$ (il che implica banalmente la convergenza in $L^2(-\pi, \pi)$ e la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$). ]

## 9.21

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica tale che $f|_{(-\pi,\pi)}$ è dispari e

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} - 3\right) \sin x + \max\left\{\frac{\pi}{2}, x\right\}, \text{ per ogni } x \in (0, \pi].$$

Con riferimento alla serie di Fourier di $f$, calcolare i coefficienti e descrivere le proprietà di convergenza.

[$b_1 = 0$. $b_{2k} = -\frac{1}{2k}$ e $b_{2k+1} = \frac{3}{2k+1} + \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^2}$, con $k \geq 1$. Proprietà di convergenza: La serie di Fourier di $f$ converge incondizionatamente a $f$ in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$. L'insieme dei punti in cui $f$ è discontinua è $D := \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Indicando con $S$ la somma della serie di Fourier, si ha $S|_{\mathbb{Z}\setminus D} = f|_{\mathbb{Z}\setminus D}$, $\quad S|_D = 0$. Inoltre la serie di Fourier di $f$ converge uniformemente a $f$ negli insiemi del tipo $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi - \varepsilon, k\pi + \varepsilon)$ con $\varepsilon \in (0, \pi)$.]

## 9.22

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica, dispari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{se } x \in (0, \pi/2] \\ \\ 0 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

- Provare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di $f$;
- Calcolare $a_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$;
- Calcolare $b_1$ e $b_2$.

[Converge in $L^2(-\pi, \pi)$ a $f$. Calcolata in $x$, converge puntualmente a:

- $f(x)$, per ogni $x \notin \pm\pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$;
- $\pi/4$, per ogni $x \in \pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$;
- $-\pi/4$, per ogni $x \in -\pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$.

Converge uniformemente a $f$ in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui $f$ è continua e cioè nei seguenti casi:

- Se $a > -\pi/2$ e $b < 0$ (e periodicizzati);
- Se $a > 0$ e $b < \pi/2$ (e periodicizzati);
- Se $a > \pi/2$ e $b < 3\pi/2$ (e periodicizzati).

$a_n = 0$ (per ogni $n = 0, 1, \ldots$), $b_1 = \pi/4$, $b_2 = 2 - 4/\pi$. ]

## 9.23

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

- Rappresentare il grafico di $f$;
- Calcolare $a_0$ e $b_1$;
- Descrivere la convergenza della serie di Fourier di $f$;
- Dare un esempio di insieme in cui la serie di Fourier di $f$ converge uniformemente a $f$.

[ $a_0 = 3\pi/2$, $b_1 = 1$. La serie di Fourier di $f$ converge a $f$ in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$ (e quindi anche puntualmente quasi ovunque, per il teorema di Lusin-Carleson). Inoltre, la serie di Fourier di $f$ in $x$ converge a:

- $f(x)$ se $x$ non è un multiplo di $\pi$;
- $\pi/4$ se $x$ è un multiplo pari di $\pi$;
- $5\pi/4$ se $x$ è un multiplo dispari di $\pi$.

Infine, la serie di Fourier di $f$ converge uniformemente a $f$ in ogni intervallo chiuso in cui $f$ è continua (per esempio in $[\pi/4, 3\pi/4]$). ]

## 9.24

Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2]$, sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica tale che

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\pi/2)^{1/2} & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ x\alpha^{-1/2}/2 & \text{se } x \in [0, 2\alpha] \\ (x-\alpha)^{1/2} & \text{se } x \in (2\alpha, \pi]. \end{cases}$$

Inoltre sia

$$f_0 := \lim_{\alpha \to 0+} f_\alpha \qquad \text{(limite puntuale).}$$

- Disegnare il grafico di $f_\alpha$, per $\alpha \in [0, \pi/2]$;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di $f_\alpha$, al variare di $\alpha \in [0, \pi/2]$ (motivare le affermazioni).

[Valgono le seguenti proprietà:

- Per ogni $\alpha \in [0, \pi/2]$, la serie di Fourier di $f_\alpha$ converge a $f_\alpha$ in $L^2(-\pi, \pi)$ (grazie alla teoria $L^2$ della serie di Fourier). Quindi tale serie converge anche puntualmente quasi ovunque a $f_\alpha$ (per il teorema di Lusin-Carleson).
- Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2)$, la serie di Fourier di $f_\alpha$ in $x$ converge a

  - $f_\alpha(x)$, se $x \notin \pi\mathbb{Z}$;
  - $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^{1/2}$, se $x \in 2\pi\mathbb{Z}$;
  - $\frac{1}{2}[(\pi/2)^{1/2} + (\pi - \alpha)^{1/2}]$, se $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

- La serie di Fourier di $f_{\pi/2}$ in $x$ converge a
  - $f_{\pi/2}(x)$, se $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$;
  - $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^{1/2}$, se $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

- Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2)$, la serie di Fourier di $f_\alpha$ converge uniformemente a $f_\alpha$ negli insiemi del tipo $\mathbb{R} \setminus ((-\varepsilon, \varepsilon) + \pi\mathbb{Z})$, con $\varepsilon > 0$.

- La serie di Fourier di $f_{\pi/2}$ converge uniformemente a $f_{\pi/2}$ negli insiemi del tipo $\mathbb{R} \setminus ((-\varepsilon, \varepsilon) + 2\pi\mathbb{Z})$, con $\varepsilon > 0$.]

# Chapter 10

# Successioni e serie di funzioni generiche, serie di potenze

## 10.1

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x^2+1)}{n^3x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Studiare la convergenza puntuale di tale serie;
- Provare che essa converge totalmente in ogni insieme del tipo

  $$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

  con $a > 0$;
- Cosa si può dire della continuità della funzione somma?

[La serie diverge in $x = 0$, converge in ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; La funzione somma è continua in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.]

## 10.2

Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin(1/n)\,(2x+1)^n.$$

[ $(-1, 0)$ ]

## 10.3

Studiare la convergenza uniforme e puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(nx^{2n} + n^{-3}\right)^{1/2}.$$

[Converge puntualmente in $(-1,1)$; converge totalmente in $L^\infty([-r,r])$ per ogni $r \in (0,1)$]

## 10.4

Descrivere convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1}(\sin x)^n.$$

[Insieme di convergenza puntuale: $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$]

## 10.5

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) := nxe^{1-nx}, \quad x \in [0,+\infty) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

provare che:

- $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0;
- $\{f_n\}$ non converge uniformemente;
- Se $a > 0$ allora la successione $\{f_n|_{[a,+\infty)}\}$ converge uniformemente.

## 10.6

Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{n^{|x|}}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

- converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- converge totalmente in $L^\infty([a,b])$, per ogni $0 < a < b < +\infty$.

## 10.7

Descrivere le proprietà di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n+1} n\,(\sin x)^n.$$

[ La serie converge puntualmente in $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ e totalmente (rispetto a $L^\infty$) negli insiemi del tipo $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon\right]$, con $\varepsilon>0$. ]

## 10.8

Studiare la covergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

[Converge puntualmente in $[-1,1]$. Converge totalmente in $(L^\infty([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$ (e quindi uniformemente in $[-r,r]$), per ogni $r\in(0,1)$.]

## 10.9

Studiare la convergenza puntuale e $L^\infty$ della successione di funzioni $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(n=1,2,\ldots)$ definite come segue:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{e^{nx}}{x+e^n} & \text{se } x\neq -e^n \\ 0 & \text{se } x=-e^n. \end{cases}$$

[La successione converge puntualmente in $(-\infty,1]$ alla funzione $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ identicamente nulla eccetto che per $x=1$, in cui vale 1. La successione converge in $L^\infty([a,b])$ con $-\infty<a<b<1$.]

## 10.10

Descrivere le proprietà di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n x^n.$$

[L'intervallo di convergenza è $[-1/2,1/2]$; La serie data converge totalmente in $(L^\infty([-1/2,1/2]),\|\cdot\|_{\infty,[-1/2,1/2]})$. In particolare la serie converge anche uniformemente nell'intervallo di convergenza.]

## 10.11

Discutere la convergenza puntuale e totale (negli spazi di Banach opportuni) della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{x^2+n}.$$

Descrivere la continuità della funzione somma nell'insieme di convergenza puntuale.

[L'insieme di convergenza puntuale è $I := (-1,1)$; La serie non converge totalmente in $(L^\infty(I),\|\cdot\|_{\infty,I})$ (e dunque nemmeno in $(C_b(I),\|\cdot\|_{\infty,I})$); Per ogni $r \in (0,1)$, posto $I_r := (-r,r)$, la serie converge totalmente in $(C_b(I_r),\|\cdot\|_{\infty,I_r})$ (e dunque anche in $(L^\infty(I_r),\|\cdot\|_{\infty,I_r})$); La somma della serie è continua in ogni punto di $I$.]

## 10.12

Studiare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2-2n^2x}{n^4}.$$

[La serie converge in $\mathbb{R}^n$ puntualmente, ma non uniformemente, alla funzione $S(x) := x^2A + xB$, dove $A := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ e $B := -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$; Per ogni $a \in (0,+\infty)$ la serie converge uniformemente in $[-a,a]$ alla funzione $S|_{[-a,a]}$.]

## 10.13

Fare un grafico qualitativo della funzione

$$f_n(x) := \left(\arctan \frac{x}{n^{1/n}}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e descrivere le proprietà di convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

[La serie converge puntualmente in $I := [-1,1)$. la serie non converge totalmente in $L^\infty(I)$ (e quindi nemmeno in $C(I)$). La serie converge totalmente in $C([-a,a])$, per ogni $a \in (0,1)$. La somma della serie è continua in $(-1,1)$.]

## 10.14

Per $n = 1, 2, \ldots$, sia
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \arctan(x^4 - n^2x^2).$$
Tracciare il grafico di $f_n$ e studiare le proprietà di convergenza della successione $\{f_n\}$.

[La successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) = -\pi/2$ se $x \neq 0$. Scelto arbitrariamente un numero reale positivo $a$, la successione non converge in $L^\infty([-a,a])$, né in $L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus (-a,a))$ (e quindi nemmeno in $C([-a,a])$, né in $C(\mathbb{R}^n \setminus (-a,a))$). Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < +\infty$, posto $I_{ab} := [-b,-a] \cup [a,b]$, si ha che $\{f_n|_{I_{ab}}\}$ converge a $f|_{I_{ab}}$ in $C(I_{ab})$. ]

## 10.15

Studiare e descrivere le proprietà di convergenza della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x^2-1)^{n^2-1}.$$

[ Converge puntualmente in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$; Converge totalmente in $(C(I_\varepsilon), \| \cdot \|_{\infty, I_\varepsilon})$ e quindi anche uniformemente in $I_\varepsilon$, dove $I_\varepsilon := [-\sqrt{2}+\varepsilon, \sqrt{2}-\varepsilon] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$. ]

## 10.16

Studiare le proprietà di convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, dove
$$f_n(x) := \frac{nx+1}{n(x^2+1)+x}.$$

[ La successione converge puntualmente e uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione $\frac{x}{x^2+1}$. ]

## 10.17

Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, si consideri la funzione

$$f_n(x) := e^{-n\left(x-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{|x|}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Descrivere:

- La convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- La convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ negli intervalli aperti di $\mathbb{R}$.

[ La successione converge puntualmente alla funzione $\chi_{\{0\}}$. Inoltre essa converge uniformemente negli intervalli $(a, b)$ con $0 < a < b < +\infty$ oppure $-\infty < a < b < 0$. In ogni altro tipo di intervallo aperto, la successione non converge uniformemente. ]

# Chapter 11

# Equazioni differenziali ordinarie

## 11.1

Usare i teoremi generali provati nel corso per dimostrare l'esistenza della soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{x-1} \\ \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Infine determinare esplicitamente tale soluzione massimale.

[ $y(x) = x\ln(x-1)$ ]

## 11.2

Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale ordinaria lineare

$$y''(x) - 3y'(x) + \frac{9}{4}y(x) = \frac{9}{4}x + 6.$$

Ricavare poi la soluzione tale che $y(0) = y(1) = 5$.

[Soluz. generale: $C_1e^{3x/2} + C_2xe^{3x/2} + x + 4$; Soluz. particolare: $e^{3x/2} - xe^{3x/2} + x + 4$]

## 11.3

Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare

$$2y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 9x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Scrivere infine il sistema differenziale del primo ordine, in forma normale, equivalente a tale equazione differenziale.

[Soluz. generale: $C_1 e^{-3x/2}\cos(3x/2) + C_2 e^{-3x/2}\sin(3x/2) + x - 1$]

## 11.4

Determinare la soluzione di
$$y'(x) + y(x)\cos x = \cos x$$
tale che $y(\pi/2) = 2$.

[$1 + e^{1-\sin x}$]

## 11.5

Determinare la soluzione dell'equazione differenziale
$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0$$
tale che
$$\lim_{x\to 0+} y(x) = 1.$$

[$\frac{\sin x}{x}$]

## 11.6

Ricavare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y''(x) - 2y'(x) = -4x, \quad x \in \mathbb{R}$$
e in seguito determinare la soluzione tale che $y(0) = y'(0) = 0$.

[$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + x^2 + x$ ; $y(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + x^2 + x$]

## 11.7

Ricavare la soluzione del problema di Cauchy
$$y'(x) + \left(1 + \frac{\cos x}{2+\sin x}\right) y(x) = \frac{x-1}{2+\sin x}, \qquad y(0) = 0.$$

$[y(x) = \frac{x-2}{2+\sin x} + \frac{2}{(2+\sin x)e^x}]$