Note di Analisi Matematica B
Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2021/2022

Silvano Delladio

June 7, 2022

Contents

June 7, 2022

CHAPTER 1

Teoria della misura

1. Misure esterne, definizione e prime proprietà

Definizione 1.1. *Una "misura esterna" sull'insieme X è una mappa $\varphi : 2^X \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$*;*
(ii) $\varphi(E) \le \varphi(F)$*, se* $E \subset F \subset X$*;*
(iii) $\varphi(\cup_j E_j) \le \sum_j \varphi(E_j)$*, se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di* X*.*

Esempio 1.1. $X \neq \emptyset$ e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che se X contiene almeno due elementi a, b, allora

$$\varphi(\{a\} \cup \{b\}) = \varphi(\{a\}) = \varphi(\{b\}) = 1.$$

In particolare φ non è additiva (vale $\varphi(\{a\} \cup \{b\}) < \varphi(\{a\}) + \varphi(\{b\})$).

Esempio 1.2 (Misura esterna di Dirac). $X \neq \emptyset$ e $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E. \end{cases}$$

Esempio 1.3 (Misura esterna del conteggio). $X \neq \emptyset$ e $\varphi(E) := \#(E)$.

Osservazione 1.1. La "misura superiore di Peano-Jordan", la "misura inferiore di Peano-Jordan" e la "misura di Peano-Jordan" non sono misure esterne.

Definizione 1.2. *Un insieme $E \in 2^X$ è detto "misurabile (rispetto alla misura esterna φ su X)" se*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) \tag{1.1}$$

per ogni $A \in 2^X$. La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a φ è indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.2. Grazie a (iii) di Definizione 1.1, la (1.1) si può sostituire con

$$\varphi(A) \ge \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c).$$

Esempio 1.4. Negli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X.$$

Teorema 1.1 (***). *Per una misura esterna φ su X, valgono i seguenti fatti:*

(1) *$\mathcal{M}_\varphi$ è c-chiusa;*
(2) *Se $E \in 2^X$ è tale che $\varphi(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}_\varphi$. In particolare $\emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $X \in \mathcal{M}_\varphi$);*
(3) *Se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_\varphi$, allora $\cap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$);*
(4) *Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, allora $S := \cup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Inoltre si ha*
$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c)$$
per ogni $A \in 2^X$;
(5) *(Additività numerabile) Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, si ha $\varphi(\cup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$.*

Osservazione 1.3. Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo $E_1^* := E_1$ e
$$E_n^* := E_n \; - \; \cup_{j=1}^{n-1} E_j \qquad (n = 2, 3, \dots).$$
Allora $\{E_j^*\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha
$$\cup_{j=1}^n E_j^* = \cup_{j=1}^n E_j \text{ (per ogni } n), \qquad \cup_j E_j^* = \cup_j E_j.$$
In particolare, ricordando il punto (4) di Teorema 1.1, si ha $\cup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$.

Definizione 1.3. *Una famiglia non vuota $\Sigma \subset 2^X$ è detta "σ-algebra (in X)" se gode delle seguenti proprietà:*

(i) *Se $E \in \Sigma$, allora $E^c \in \Sigma$;*
(ii) *Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cup_j E_j \in \Sigma$.*

Osservazione 1.4. In Definizione 1.3 l'assioma (ii) può venir sostituito da

(ii)* Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cap_j E_j \in \Sigma$.

Esempio 1.5. Sia X un qualsiasi insieme. Allora 2^X e $\{\emptyset, X\}$ sono entrambe σ-algebre in X. Se Σ è una qualsiasi σ-algebra in X, si ha $\{\emptyset, X\} \subset \Sigma \subset 2^X$.

Esempio 1.6. $\Sigma := \{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$ è una σ-algebra.

Esempio 1.7. La famiglia $\Sigma := \{E \in 2^{\mathbb{N}} \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$ è c-chiusa ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile. Quindi Σ non è una σ-algebra.

Per Teorema 1.1 e Osservazione 1.3, vale quindi il seguente risultato.

Proposizione 1.1 (°). *Se φ è una misura esterna su X, allora $\mathcal{M}_\varphi$ è una σ-algebra.*

Teorema 1.2 (**). *Se φ è una misura esterna su X, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *(Continuità dal basso) Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha $\varphi(\cup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$.*
(2) *(Continuità dall'alto) Sia $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili, con $\varphi(E_1) < \infty$. Allora $\varphi(\cap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$.*

Osservazione 1.5. Se in (2) di Teorema 1.2 non si assume l'ipotesi $\varphi(E_1) < \infty$, la tesi può fallire. Per esempio, se $X := \mathbb{N}$ con $\varphi(E) := \#(E)$, possiamo considerare la famiglia degli $E_j := \{j, j+1, \dots\} \in \mathcal{M}_\varphi = 2^X$. In tal caso si ha $\cap_j E_j = \emptyset$ e quindi $\varphi(\cap_j E_j) = 0$, mentre $\varphi(E_j) = \infty$ per ogni j.

2. Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radón

Definizione 1.4. *Una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) è detta "di Carathéodory" (oppure "metrica") se*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \in 2^X$ tale che

$$dist(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0.$$

Teorema 1.3 (***). *Sia φ una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico (X, d). Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.*

Osservazione 1.6. Si può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema 1.3: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([**12**, Theorem 1.7]).

Proposizione 1.2 (*). *Sia dato $\mathcal{I} \subset 2^X$ e indichiamo con $\mathcal{A}_\mathcal{I}$ la famiglia delle σ-algebre in X contenti $\mathcal{I}$. Allora*

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \cap_{\Sigma \in \mathcal{A}_\mathcal{I}} \Sigma$$

è una σ-algebra in X, detta "la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$". Se $\mathcal{I}$ è una σ-algebra allora $\Sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Inoltre la mappa $\mathcal{I} \mapsto \Sigma(\mathcal{I})$ è monotona crescente, i.e., $\Sigma(\mathcal{I}_1) \subset \Sigma(\mathcal{I}_2)$ ogni volta che $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset 2^X$.

Proposizione 1.3 (**). *Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di X. Allora:*

(1) *Si ha $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$;*
(2) *Se X è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$;*
(3) *Se (X, d) è uno spazio metrico separabile, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$ (dimostrato nel caso particolare dello spazio Euclideo; per una trattazione del caso generale si può vedere [**13**]).*

Osservazione 1.7. In uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che $\Sigma(\mathcal{K}) \neq \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Si consideri per esempio $[0, 1]$ con la topologia discreta e cioè $\mathcal{G} := 2^{[0,1]}$. Osserviamo che $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $[0,1]$. Se consideriamo la σ-algebra

$$\Sigma_0 := \{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$$

introdotta in Esempio 1.6, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]}$. Inoltre, evidentemente, vale $\Sigma_0 \neq 2^{[0,1]} = \mathcal{G} = \Sigma(\mathcal{G})$.

Definizione 1.5. *Siano X uno spazio topologico, φ una misura esterna su X e $\mathcal{M}_\varphi$ la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a φ. Allora:*

(i) *La σ-algebra $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ viene indicata con $\mathcal{B}(X)$ e i suoi elementi sono detti "insiemi Boreliani";*
(ii) *φ è detta "Boreliana" (oppure "di Borel") se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$;*
(iii) *φ è detta "Borel regolare" se è Boreliana e se inoltre per ogni insieme $A \in 2^X$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $B \supset A$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$. L'insieme B prende il nome di "involucro Boreliano" di A;*
(iv) *φ è detta "di Radón" se è Borel regolare e se $\varphi(K) < \infty$ per ogni insieme compatto K in X.*

Da Teorema 1.3 segue subito il seguente risultato.

Corollario 1.1 (°). *Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è Boreliana.*

Valgono i seguenti due interessanti risultati di approssimazione, che qui enunciamo senza dimostrazione. Per una dimostrazione del primo rimandiamo a [**5**, Theorem 4.17]). Il secondo è un corollario piuttosto facile del primo, cfr. [**5**, Corollary 4.18]).

Teorema 1.4. *Sia φ una misura esterna Boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $B \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.5. *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ e $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $E \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.6 (***). *Si consideri la funzione* $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ *definita da*

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \Big\{ \sum_j v(I_j) \,\Big|\, \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \Big\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ *indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di* E *costituiti di intervalli aperti in* $\mathbb{R}^n$ *(in particolare* $\mathcal{R}(\emptyset) = \{\{I_j\}_{numer} | I_j$ *è interv. ap. in* $\mathbb{R}^n\}$*), mentre* $v(I_j)$ *denota la misura elementare dell'intervallo* I_j*. Allora* $\mathcal{L}^n$ *è una misura esterna metrica ed è di Radón.*

Definizione 1.6. *La misura esterna* $\mathcal{L}^n$ *definita in Teorema 1.6 è detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".*

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

Teorema 1.7 (**). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni* $a \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$*;*
(2) *Se* I *è un intervallo aperto in* $\mathbb{R}^n$*, si ha* $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$*;*
(3) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *non vuoto e per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *si ha:*
- $\mathcal{L}^n(E + \tau) = \mathcal{L}^n(E)$*;*
- *Se* $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ *allora* $E + \tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$*;*

(4) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *non vuoto e per ogni* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *si ha:*
- $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$*;*
- *Se* $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ *allora* $\rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$*;*

Esercizio 1.1. Provare le seguenti identità:

$$(E + \tau)^c = E^c + \tau, \qquad (A + \tau) \cap (B + \tau) = (A \cap B) + \tau$$
$$(\rho E)^c = \rho E^c, \qquad (\rho A) \cap (\rho B) = \rho(A \cap B).$$

Esempio 1.8. Si ha $\mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n) = 0$. L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è misurabile.

Osservazione 1.8. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^1$ ma non sono Boreliani. Indicato con C l'insieme di Cantor e ricordando che $\mathcal{L}^1(C) = 0$, si ha infatti $2^C \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$ (per (2) di Teorema 1.1) e quindi anche

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(C) < \mathrm{card}(2^C) \leq \mathrm{card}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}).$$

A questo punto la conclusione segue subito dal fatto che $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [**15**].

Esempio 1.9 (Esistenza di insiemi non misurabili; l'esempio di Vitali). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0, 1]$: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme E di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap (0, 1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, poniamo infine

$$E_i := E'_i \cup E''_i$$

con

$$E'_i := (E \cap [0, q_i]) + 1 - q_i, \quad E''_i := (E \cap (q_i, 1]) - q_i.$$

Valgono le seguenti proprietà:

(1) Gli insiemi E_i sono a-due-a-due disgiunti, i.e., $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$;
(2) Si ha
$$(0,1) \subset \bigcup_i E_i \subset [0,1]$$
e quindi
$$\mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i\Big) = 1.$$

Ora possiamo provare che E non è misurabile. Se (per assurdo) lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli E_i e si avrebbe $\mathcal{L}^1(E_i) = \mathcal{L}^1(E)$. Si giungerebbe così all'assurdo:
$$1 = \mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i\Big) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

Esercizio 1.2. Provare che se $i \neq j$ allora $E_i'' \cap E_j'' = \emptyset$.

Osservazione 1.9. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

Teorema 1.8 (*). *Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, indichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dei ricoprimenti numerabili $\{C_j\}$ di E tali che $0 < diam(C_j) \leq \delta$ per ogni j (in particolare $\mathcal{R}_\delta(\emptyset) = \{\{C_j\}_{numer} \,|\, C_j \subset \mathbb{R}^n, 0 < diam(C_j) \leq \delta\}$). Per $s \in [0, +\infty)$, poniamo anche*
$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$
Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ definita da
$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \,\middle|\, \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$
è una misura esterna.

Osservazione 1.10. Si può provare che $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B_1^{(n)})$, dove $B_1^{(n)}$ è la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per una dimostrazione di questo fatto, si veda per esempio [**16**, Ch. 2, Exercise 14].

Esercizio 1.3. Verificare col calcolo diretto che:
$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = \pi, \quad \alpha(3) = \frac{4\pi}{3}.$$

Teorema 1.9 (**). *Sia $s \in [0, +\infty)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ è monotona decrescente, quindi esiste*
$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$
La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ è una misura esterna metrica e Borel regolare. Essa è detta "misura esterna di Hausdorff s-dimensionale (in $\mathbb{R}^n$)".

Esercizio 1.4. Provare che se X è uno spazio metrico, allora per ogni sottoinsieme C di X si ha diam $C =$ diam $\overline{C}$.

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema di cui non proviamo il punto (2) e lasciamo per esercizio le parti dei punti (3) e (4) che replicano quasi identicamente gli argomenti usati per provare le corrispondenti asserzioni in Teorema 1.7. La dimostrazione del punto (2) è un argomento (basato sulla disuguaglianza isodiametrica) che non abbiamo tempo di affrontare. Gli interessati possono consultare, per esempio, [**3, 11**].

TEOREMA 1.10 (*). *Si ha:*

(1) $\mathcal{H}^0 = \#$ *(misura del conteggio);*
(2) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *(in* $\mathbb{R}^n$*);*
(3) *Per ogni insieme non vuoto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *si ha:*
   - $\mathcal{H}^s(E+\tau) = \mathcal{H}^s(E)$;
   - *Se* $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ *allora* $E+\tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$;
(4) *Per ogni insieme non vuoto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *si ha:*
   - $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$;
   - *Se* $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ *allora* $\rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$;

Esercizio 1.5. Relativamente a Teorema 1.10, provare il secondo punto di (3) ed il secondo punto di (4).

Attraverso le proprietà della misura di Hausdorff si può definire una nozione di dimensione per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 1.4 (*). *Se* $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, *con* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s \geq 0$, *allora* $\mathcal{H}^t(E) = 0$ *per ogni* $t > s$. *Inoltre, per ogni* $t > n$ *si ha* $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$. *Conseguentemente, per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$, *l'insieme*

$$R(E) := \{t \in [0,+\infty) \,|\, \mathcal{H}^t(E) = 0\}$$

è una semiretta destra che include $(n,+\infty)$. *La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme* $E \subset \mathbb{R}^n$ *è definita come il numero*

$$dim_H(E) := \inf R(E) \leq n.$$

COROLLARIO 1.2 (*). *La misura esterna di Haudorff* $\mathcal{H}^s$ *in* $\mathbb{R}^n$ *non è di Radón, eccetto che per* $s \geq n$.

ESEMPIO 1.10. Sia C l'insieme di Cantor. Non è facile verificare che esiste s tale che $\mathcal{H}^s(C) \in (0,+\infty)$, ma se proviamo a supporre che esista allora troviamo facilmente che deve essere $s = \dim_H(C) = \ln 2/\ln 3$. Questo ci consente di "scommettere" che C abbia effettivamente dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2/\ln 3$. Per una dimostrazione completa di tale fatto vedasi, per esempio, [**4**, Theorem 1.14] oppure [**16**, Ch. 7, Theorem 2.1].

DEFINIZIONE 1.7. *Sia* X *un insieme e* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X. *Allora, una "misura su* $\mathcal{A}$*" è una funzione* $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ *tale che:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) *se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi in* $\mathcal{A}$ *a-due-a-due disgiunti, allora* $\mu(\cup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$.

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detta "spazio con misura".

Come conseguenza di Teorema 1.1 e Proposizione 1.1, otteniamo subito il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.5 (°). *Se φ è una misura esterna sull'insieme X, allora $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$ è uno spazio con misura.*

ESEMPIO 1.11. La "misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$. Per semplicità esse sono indicate con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$, rispettivamente.

OSSERVAZIONE 1.11. Ci si può chiedere se una misura provenga sempre da una misura esterna nel modo indicato in Proposizione 1.5. Una risposta quasi affermativa è data dal seguente risultato (vedasi [**5**, Theorem 4.47]): Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μ è uno spazio con misura, allora esiste una misura esterna φ su X tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$ e $\varphi|_\mathcal{A} = \mu$.

CHAPTER 2

Funzioni misurabili e integrale.

1. Funzioni misurabili.

Definizione 2.1. *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e (Y, τ), rispettivamente, uno spazio con misura e uno spazio topologico. Allora una funzione $f : X \to Y$ si dice "misurabile" se per ogni $G \in \tau$ si ha $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.*

Osservazione 2.1. Consideriamo uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e supponiamo che X sia anche uno spazio topologico con la topologia inclusa in $\mathcal{A}$. Inoltre, siano Y uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora f è misurabile. Esempi di situazioni di questo tipo sono:

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}, \mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}})$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ continua;
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}, \mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}})$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ continua.

Proposizione 2.1 (°). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano Y, Z spazi topologici. Supponiamo inoltre che $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ siano, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione continua. Allora $g \circ f : X \to Z$ è una funzione misurabile.*

Esercizio 2.1. Siano dati due insiemi qualsiasi X, Y e una funzione qualsiasi $f : X \to Y$. Provare che:

- Per ogni $\{E_j\} \subset 2^Y$ si ha $f^{-1}(\cap_j E_j) = \cap_j f^{-1}(E_j)$ e $f^{-1}(\cup_j E_j) = \cup_j f^{-1}(E_j)$;
- Per ogni $E \in 2^Y$ si ha $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$.

Proposizione 2.2 (**). *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora le seguenti affermazioni sono fra di loro equivalenti:*

(1) *f è misurabile;*
(2) *$f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(3) *$f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(4) *$f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(5) *$f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 2.2. Con riferimento a Proposizione 2.2 provare (4) $\Rightarrow$ (5) e (5) $\Rightarrow$ (2).

Esercizio 2.3. Provare che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, allora le funzioni $-f$ e $f/2$ sono misurabili.

Teorema 2.1 (**). *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili. Allora $f + g$ (escludendo che si verifichi $\infty - \infty$), $|f|$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili. Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, la funzione f/g è misurabile.*
(2) *Sia data una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Allora le funzioni $\inf_k f_k$, $\sup_k f_k$, $\liminf_k f_k$ e $\limsup_k f_k$ sono misurabili. In particolare, se esiste $\lim_k f_k$ allora questo è misurabile.*

Osservazione 2.2. Può capitare che il valore assoluto di una funzione non misurabile sia misurabile. Per esempio, consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$ e sia E l'insieme non misurabile di Vitali (si veda Esempio 1.9). Allora la funzione $f := \chi_E - \chi_{E^c}$ non è misurabile, mentre $|f| = 1$ è misurabile.

2. Integrale: definizione e prime proprietà

Definizione 2.2. *Sia X un insieme. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice "numerabilmente semplice" se Im(f) è numerabile.*

Osservazione 2.3. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione numerabilmente semplice allora si ha

$$f = \sum_i a_i \chi_{A_i} \quad \text{(rappresentazione canonica di } f)$$

dove $\{a_i\} = \mathrm{Im}(f)$ e $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$. Nel caso particolare che X sia il dominio di uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e che f sia misurabile si ha inoltre che $A_i \in \mathcal{A}$, per ogni i. Infatti, osservando che $\{a_i\}^c = [-\infty, a_i) \cup (a_i, +\infty]$ è un sottoinsieme aperto di $\overline{\mathbb{R}}$, si ha:

$$A_i = f^{-1}(\{a_i\}) = f^{-1}([\{a_i\}^c]^c) = [f^{-1}(\{a_i\}^c)]^c \in \mathcal{A}.$$

Definizione 2.3. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e indichiamo con Σ la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora:*

(i) *Se $\varphi \in \Sigma$ e $\varphi \geq 0$, poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := \sum_i a_i \mu(A_i); \qquad \{a_i\} = Im(\varphi),\ A_i := \varphi^{-1}(\{a_i\})$$

dove si assume per convenzione che $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$;

(ii) *Sia Σ^* la famiglia delle funzioni $\varphi \in \Sigma$ tali che almeno uno di $I_\mu(\varphi \vee 0)$ e $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$ sia finito. Se $\varphi \in \Sigma^*$ allora poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((-\varphi) \vee 0).$$

Osservazione 2.4. Nelle ipotesi e con la notazione di Definizione 2.3, sia $\varphi \in \Sigma^*$ e definiamo

$$J_+ := \{i \,|\, a_i \geq 0\}, \quad J_- := \{i \,|\, a_i < 0\}.$$

Allora

$$\varphi \vee 0 = \sum_{i \in J_+} a_i \chi_{A_i}, \quad -[(-\varphi) \vee 0] = \varphi \wedge 0 = \sum_{i \in J_-} a_i \chi_{A_i}$$

da cui

$$I_\mu(\varphi \vee 0) = \sum_{i \in J_+} a_i \mu(A_i) = \sum_{i \in J_+} |a_i| \mu(A_i)$$

e

$$I_\mu((-\varphi) \vee 0) = \sum_{i \in J_-} (-a_i) \mu(A_i) = \sum_{i \in J_-} |a_i| \mu(A_i).$$

Ne segue che

$$I_\mu(\varphi) = I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((-\varphi) \vee 0) = \sum_i a_i \mu(A_i).$$

Com'è naturale attendersi, si ha anche

$$I_\mu(|\varphi|) = \sum_i |a_i| \mu(A_i) = I_\mu(\varphi \vee 0) + I_\mu((-\varphi) \vee 0). \tag{2.1}$$

Per dimostrarlo, osserviamo prima di tutto che se $i \in J+$ allora potrebbe capitare che esista $j \in J_-$ tale che $-a_j = a_i$. In tal caso poniamo $f(i) := j$ e indichiamo con L l'insieme degli i per cui questo accade. Rimane così definita una funzione

$$f : L \subset J_+ \to f(L) \subset J_-$$

with the following property

$$-a_{f(i)} = a_i \quad \text{(per ogni } i \in L).$$

Se $L \neq \emptyset$ allora la rappresentazione canonica di $|\varphi|$ sarà

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \sum_i |a_i| \chi_{A_i} = \sum_{i \in J_+} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i \in J_-} (-a_i) \chi_{A_i} \\ &= \sum_{i \in J_+ \setminus L} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i \in L} a_i \chi_{A_i \cup A_{f(i)}} + \sum_{j \in J_- \setminus f(L)} (-a_j) \chi_{A_j}. \end{aligned}$$

Da questa (dopo aver osservato che $|\varphi| \in \Sigma^*$) si ricava facilmente che vale (2.1). Se invece $L = \emptyset$, la rappresentazione canonica di $|\varphi|$ sarà ovviamente

$$|\varphi| = \sum_i |a_i| \chi_{A_i} = \sum_{i \in J_+} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i \in J_-} (-a_i) \chi_{A_i}$$

e allora (2.1) segue banalmente. La precedente discussione prova, in particolare, l'equivalenza delle seguenti proprietà:

- $I_\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$;
- $I_\mu(\varphi \vee 0), I_\mu((-\varphi) \vee 0) < +\infty$;
- $I_\mu(|\varphi|) = \sum_i |a_i| \mu(A_i) < +\infty$.

Definizione 2.4. *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e tre funzioni*

$$f, g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

(i) *Se esiste $Z \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(Z) = 0$ e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X \setminus Z$, allora diremo che "f è minore o uguale di g quasi ovunque rispetto a μ" (o equivalentemente che "g è maggiore o uguale di f quasi ovunque rispetto a μ") e scriveremo $f \leq g$ μ-q.o. (o equivalentemente $g \geq f$ μ-q.o.);*

(ii) *Se esiste $Z \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(Z) = 0$ e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X \setminus Z$, allora diremo che "f è uguale a g quasi ovunque rispetto a μ" e scriveremo $f = g$ μ-q.o.*

Esercizio 2.4. Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e tre funzioni

$$f, g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Provare le seguenti proprietà:

(1) Si ha $f = g$ μ-q.o. se e solo se

$$\begin{cases} f \leq g & \mu\text{-q.o.}, \\ f \geq g & \mu\text{-q.o.}. \end{cases}$$

(2) Se

$$\begin{cases} f = g & \mu\text{-q.o.}, \\ g \leq h & \mu\text{-q.o.} \end{cases}$$

allora $f \leq h$ μ-q.o.

Osservazione 2.5. Sia dato uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Allora μ è monotona, i.e.,

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2), \text{ per ogni } A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ tali che } A_1 \subset A_2.$$

Proposizione 2.3 (*). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Allora*

$$I_\mu(\varphi) \leq I_\mu(\psi)$$

per ogni $\varphi, \psi \in \Sigma^*$ tali che $\varphi \leq \psi$ μ-q.o. Di conseguenza, se consideriamo una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e poniamo

$$\Sigma_-(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \leq f \ \mu\text{-q.o.}\}, \qquad \Sigma_+(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \geq f \ \mu\text{-q.o.}\}$$

allora tali insiemi sono entrambi non vuoti e vale la disuguaglianza

$$\sup\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_-(f)\} \leq \inf\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_+(f)\}.$$

Osservazione 2.6. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura e $\varphi, \psi \in \Sigma^*$ sono tali che $\varphi = \psi$ μ-q.o., allora da Proposizione 2.3 segue subito che $I_\mu(\varphi) = I_\mu(\psi)$.

Definizione 2.5. *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora:*

(i) *L'"integrale superiore di f" è dato da*

$$\int^* f \, d\mu := \inf\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

mentre l'"integrale inferiore di f" è

$$\int_* f \, d\mu := \sup\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_-(f)\}.$$

(N.B. Si ha $\int_* f\,d\mu \le \int^* f\,d\mu$, per Proposizione 2.3)

(ii) *Si dice che "f è integrabile" se f è misurabile e gli integrali inferiore e superiore di f sono uguali. In tal caso si definisce l'"integrale di f" come segue*

$$\int f\,d\mu := \int^* f\,d\mu = \int_* f\,d\mu.$$

(iii) *Si dice che "f è sommabile" se f è integrabile e $\int f d\mu$ è finito.*

Osservazione 2.7. Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e due funzioni $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f = g$ μ-q.o. Allora si ha

$$\Sigma_-(f) = \Sigma_-(g), \qquad \Sigma_+(f) = \Sigma_+(g)$$

e quindi

$$\int_* f\,d\mu = \int_* g\,d\mu, \qquad \int^* f\,d\mu = \int^* g\,d\mu.$$

In particolare, f è integrabile se e solo se g è integrabile. In tal caso si ha

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Esercizio 2.5. Provare che se $\varphi \in \Sigma^*$ e $I_\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$, allora esiste $\overline{\varphi} \in \Sigma^*$ tale che $\mathrm{Im}(\overline{\varphi}) \subset \mathbb{R}$ e $\overline{\varphi} = \varphi$ μ-q.o. (e quindi $I_\mu(\overline{\varphi}) = I_\mu(\varphi)$, per Osservazione 2.6).

Esercizio 2.6. Provare che se E, F sono sottoinsiemi di X, allora $\chi_E \chi_F = \chi_{E\cap F}$.

Esercizio 2.7. Data una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sia

$$P := f^{-1}([0, +\infty]), \quad N := P^c = f^{-1}([-\infty, 0)).$$

Dimostrare che

$$|f| = f\chi_P - f\chi_N, \quad f = |f|\chi_P - |f|\chi_N.$$

Il seguente risultato elenca le prime proprietà dell'integrale, ben note nella trattazione elementare.

Teorema 2.2 (***). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se $\varphi \in \Sigma^*$ allora φ è integrabile e si ha $\int \varphi\,d\mu = I_\mu(\varphi)$. In particolare, se $I_\mu(\varphi)$ è finito allora φ è sommabile;*

(2) *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$-\infty < \int_* f\,d\mu, \quad \int^* f\,d\mu < +\infty$$

è finita μ-q.o. In particolare, una funzione sommabile è finita μ-q.o.;

(3) *Se f, g sono funzioni sommabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ (purché sia ben definita) è sommabile e si ha*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu;$$

(4) *Se f, g sono due funzioni integrabili tali che $f \le g$ μ-q.o., allora*

$$\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu;$$

(5) *Se f è una funzione sommabile e $A \in \mathcal{A}$, allora $f\chi_A$ è una funzione sommabile;*
(6) *Una funzione misurabile f è sommabile se e soltanto se $|f|$ è una funzione sommabile;*
(7) *Se f è una funzione sommabile, allora*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Osservazione 2.8. Una funzione non misurabile (e quindi non integrabile) può avere valore assoluto sommabile. Per esempio: se lo spazio con misura è $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$ e se E indica l'insieme non misurabile di Vitali (Esempio 1.9), allora la funzione $f := \chi_E - \chi_{[0,1]\setminus E}$ non è misurabile mentre $|f| = \chi_{[0,1]}$ è ovviamente sommabile. Questo fa capire come mai nel punto (6) di Teorema 2.2 si assume che f sia misurabile.

Definizione 2.6. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile e se $A \in \mathcal{A}$, allora:*

(i) *Se $f\chi_A$ è integrabile, si dice che "f è integrabile in A" e si pone*

$$\int_A f \, d\mu := \int f\chi_A \, d\mu;$$

(ii) *Se $f\chi_A$ è sommabile, si dice che "f è sommabile in A".*

Osservazione 2.9. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Valgono le seguenti proprietà:

- La funzione f è integrabile (risp. sommabile) in X se e solo se f è integrabile (risp. sommabile). In tal caso si ha $\int_X f \, d\mu = \int f \, d\mu$.
- Se $A \in \mathcal{A}$ allora la funzione 1 è integrabile in A e vale $\int_A 1 \, d\mu = \mu(A)$.
- Se f è sommabile allora f è sommabile in ogni $A \in \mathcal{A}$ (per (5) di Teorema 2.2).

Vale il seguente teorema che manifesta la maggior "versatilità" di questa questa teoria dell'integrazione rispetto a quella più elementare di Riemann.

Teorema 2.3 (**). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una funzione misurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f \geq 0$ μ-q.o. Allora f è integrabile.*

Esercizio 2.8. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Provare che per ogni funzione integrabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vale la disuguaglianza $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$ (provata in Teorema 2.2 per f sommabile).

Esercizio 2.9. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Provare che se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sono due funzioni misurabili tali che $f, g \geq 0$ $\mu-$q.o., allora si ha $\int (f+g) d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

Corollario 2.1 (*). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione sommabile soddisfacenti $|f| \leq |g|$ μ-q.o. Allora f è sommabile.*

Vale anche questo facile (e intuitivo) risultato che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 2.4 (*). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione misurabile tale che* $f \geq 0$ μ*-q.o. e* $\int_X f\, d\mu = 0$*. Allora* $f = 0$ μ*-q.o.*

Quanto al confronto fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, vale il seguente risultato (solo enunciato, dimostrazione e.g. in [**5**, Theorem 6.16]).

Teorema 2.4. *Una funzione limitata* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Riemann se e solo se* f *è continua* $\mathcal{L}^1$*-q.o. in* $[a, b]$*. In tal caso l'integrale di Riemann di* f *coincide con* $\int_{[a,b]} \tilde{f}\, d\mathcal{L}^1$*, dove* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è l'estensione di* f *che vale zero in* $\mathbb{R} \setminus [a, b]$*.*

Anticipazioni sul teorema di Fubini e sulla formula dell'area, finalizzate alle esercitazioni. Esempi ed esercizi su integrali.

Esempi ed esercizi su integrali.

3. Teoremi di convergenza integrale

Vale il seguente importante risultato, per una dimostrazione del quale si suggerisce di consultare [**3**, Section 6.10].

Teorema 2.5 (Lemma di Fatou). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\int \liminf_k f_k\, d\mu \leq \liminf_k \int f_k\, d\mu.$$

Teorema 2.6 (Convergenza monotona (*)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_{k+1} \geq f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\lim_k \int f_k\, d\mu = \int \lim_k f_k\, d\mu.$$

Corollario 2.2 (°). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_k \geq 0$ μ*-q.o. Allora*

$$\int \sum_k f_k\, d\mu = \sum_k \int f_k\, d\mu.$$

Teorema 2.7 (Convergenza dominata (**)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e si abbiano:*

(i) *Una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *che converge* μ*-q.o. a* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*;*
(ii) *Una funzione sommabile* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $|f_k| \leq g$ μ*-q.o., per ogni* k*.*

Allora ogni f_k e f sono sommabili e vale

$$\lim_k \int |f_k - f|\, d\mu = 0.$$

In particolare

$$\lim_k \int f_k\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Osservazione 2.10. Il seguente esempio mostra come, in generale:

- Nel Lemma di Fatou possa valere la disuguaglianza stretta;
- La conclusione del teorema di Lebesgue (convergenza dominata) possa essere falsa sotto la sola ipotesi di convergenza puntuale.

Consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$ e la successione di funzioni

$$f_k := k\chi_{(0,1/k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Si vede subito che tale successione converge ovunque alla funzione $f := 0$, mentre si ha

$$\int f_k\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = \int_{(0,1/k)} k\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1$$

e anche

$$\int |f_k - f|\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = \int_{(0,1/k)} k\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1$$

per ogni k. Quindi

$$\int f\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 0 < 1 = \lim_k \int f_k\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}).$$

e

$$\lim_k \int |f_k - f|\, d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1 \neq 0.$$

Corollario 2.3 (*). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile. Allora la funzione $\nu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definita come segue*

$$\nu_f(A) := \int f\chi_A\, d\mu = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A} \tag{3.1}$$

è una misura con segno, i.e.

1. *Si ha $\nu_f(\emptyset) = 0$;*
2. *Se $\{A_i\}$ è una famiglia numerabile di elementi a-due-a-due disgiunti di $\mathcal{A}$, allora*
$$\nu_f(\cup_i A_i) = \sum_i \nu_f(A_i)$$
e tale serie converge assolutamente.

Inoltre:

- *ν_f è assolutamente continua rispetto a μ, ossia: se $\mu(A) = 0$, con $A \in \mathcal{A}$, allora $\nu_f(A) = 0$;*

- *La variazione totale di ν_f è finita e più precisamente*

$$|\nu_f|(X) := \sup\Big\{\sum_j |\nu_f(X_j)| \,:\, \{X_j\}_{num} \text{ partiz. mis. di } X\Big\}$$
$$\leq \int |f|\,d\mu < +\infty.$$

Osservazione 2.11. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ (ossia: se $\mu(A) = 0$, con $A \in \mathcal{A}$, allora $\nu(A) = 0$). Sorge spontaneamente la seguente questione: è vero che ν si può rappresentare nella forma integrale (2.3)? Ebbene, a tale questione risponde affermativamente il teorema di Radon Nikodym. Esso afferma che esiste una funzione sommabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\nu_f = \nu$. Per una dimostrazione di tale importante risultato si può consultare, per esempio, [**5**, Section 6.6].

4. Il teorema di Fubini

Proposizione 2.5 (**). *Siano dati due insiemi X, Y e due misure esterne*

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty].$$

Inoltre, se $E \subset X \times Y$, sia

$$\mathcal{R}(E) := \{\{A_i \times B_i\}_{num} \,|\, A_i \in \mathcal{M}_\mu,\ B_i \in \mathcal{M}_\nu,\ E \subset \cup_i (A_i \times B_i)\}.$$

Allora la funzione

$$\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \to [0, +\infty]$$

definita come segue ($E \subset X \times Y$)

$$(\mu \times \nu)(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \inf\{\sum_i \mu(A_i)\nu(B_i) \,|\, \{A_i \times B_i\} \in \mathcal{R}(E)\} & \text{se } E \neq \emptyset \end{cases}$$

è una misura esterna.

Per le misure di Lebesgue vale il seguente risultato.

Proposizione 2.6 (**). *Per ogni coppia di numeri interi positivi m, n si ha*

$$\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}.$$

Definizione 2.7. *Una misura esterna $\varphi : 2^X \to [0, +\infty]$ è detta σ-finita se esiste una famiglia numerabile $\{X_j\}$ di insiemi misurabili rispetto a φ tale che $X = \cup_j X_j$ e $\varphi(X_j) < +\infty$ per ogni j.*

Osservazione 2.12. In Definizione 2.7 non sarebbe restrittivo aggiungere l'ipotesi che gli insiemi X_j siano a-due-a-due disgiunti.

Vale il seguente profondo risultato, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [**5**, Theorem 6.46].

TEOREMA 2.8. *Siano date due misure esterne σ-finite*

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty].$$

Allora per ogni $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ si ha:

(1) $S_x := \{y \in Y \,|\, (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\nu$, *per μ-q.o. $x \in X$;*
(2) $x \mapsto \nu(S_x)$ *è μ-misurabile (quindi μ-integrabile) e vale l'identità*

$$\int \nu(S_x)\, d\mu = (\mu \times \nu)(S).$$

OSSERVAZIONE 2.13. Con riferimento a Teorema 2.8, potremmo chiederci se valga la proprietà più forte che

$$S_x \in \mathcal{M}_\nu \text{ per ogni } x \in X, \text{ tutte le volte che } S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}.$$

Ebbene, in generale questo non è vero. Per provarlo, consideriamo l'insieme $E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$ costruito in Esempio 1.9 e definiamo

$$S := \{0\} \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Poiché $(\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1)(S) = \mathcal{L}^2(S) = 0$, si ha che $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1\times\mathcal{L}^1}$ (per (2) di Teorema 1.1). Tuttavia $S_0 = E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$.

TEOREMA 2.9 (***). *Siano date due misure esterne σ-finite*

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty]$$

e una funzione $\mu \times \nu$-misurabile $f(x, y) : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo inoltre che f sia $(\mu \times \nu)$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$. Allora:

(1) $S_x := \{y \in Y \,|\, (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\nu$, *per μ-q.o. $x \in X$;*
(2) $y \mapsto f(x, y)$ *è ν-sommabile in S_x, per μ-q.o. $x \in X$;*
(3) $x \mapsto \int_{S_x} f(x, y)\, d\nu(y)$ *è μ-sommabile;*
(4) *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_{S_x} f(x, y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

Naturalmente, lo stesso argomento prova anche il seguente risultato speculare al precedente.

TEOREMA 2.10 (°). *Siano date due misure esterne σ-finite*

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty]$$

e una funzione $\mu \times \nu$-misurabile $f(x, y) : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo inoltre che f sia $(\mu \times \nu)$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$. Allora:

(1) $S_y := \{x \in X \,|\, (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\mu$, *per ν-q.o. $y \in Y$;*

(2) *$x \mapsto f(x,y)$ è μ-sommabile in S_y, per ν-q.o. $y \in Y$;*
(3) *$y \mapsto \int_{S_y} f(x,y)\,d\mu(x)$ è ν-sommabile;*
(4) *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f\,d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_{S_y} f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

Applicando Teorema 2.9 alle misure di Lebesgue e ricordando Proposizione 2.6, otteniamo subito il seguente risultato.

Corollario 2.4 (°). *Sia $f(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{L}^{m+n}$-misurabile. Supponiamo inoltre che f sia $\mathcal{L}^{m+n}$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^{m+n}}$. Allora:*

(1) *$S_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in S\} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$, per $\mathcal{L}^m$-q.o. $x \in \mathbb{R}^m$;*
(2) *$y \mapsto f(x,y)$ è $\mathcal{L}^n$-sommabile in S_x, per $\mathcal{L}^m$-q.o. $x \in \mathbb{R}^m$;*
(3) *$x \mapsto \int_{S_x} f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)$ è $\mathcal{L}^m$-sommabile;*
(4) *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f\,d\mathcal{L}^{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{S_x} f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right] d\mathcal{L}^m(x).$$

Osservazione 2.14. Usando Teorema 2.8 e la sottostante Proposizione 2.7, si prova facilmente il seguente risultato sulla "compatibilità misura-integrale". Siano dati una misura esterna σ-finita $\mu : 2^X \to [0,+\infty]$, una funzione μ-misurabile $f : X \to [0,+\infty]$ e $\Omega \in \mathcal{M}_\mu$. Osserviamo che $f\chi_\Omega$ è μ-misurabile e non negativa, quindi essa è integrabile (per Teorema 2.3). Definiamo il sottografico di $f|_\Omega$:

$$S_{f|_\Omega} := \{(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty] \mid 0 \le t < f(x)\}.$$

Applicando Proposizione 2.7 in $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu|_{\mathcal{M}_\mu})$, troviamo una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili $s_j : X \to \mathbb{R}$ tali che $0 \le s_j \le s_{j+1} \le f$ e s_j converge puntualmente a f. Ne consegue facilmente che

$$S_{f|_\Omega} = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{s_j|_\Omega}.$$

Inoltre, per un passo della dimostrazione di Teorema 2.8 in cui si prova che $\mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1} \subset \mathcal{M}_{\mu\times\mathcal{L}^1}$, si ha $S_{s_j|_\Omega} \in \mathcal{M}_{\mu\times\mathcal{L}^1}$ per ogni j. Allora $S_{f|_\Omega} \in \mathcal{M}_{\mu\times\mathcal{L}^1}$. Dallo stesso Teorema 2.8 otteniamo che:

- $(S_{f|_\Omega})_x \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$ per μ-q.o. $x \in X$ e $x \mapsto \mathcal{L}^1((S_{f|_\Omega})_x)$ è μ-misurabile e quindi μ-integrabile. Osserviamo che in questo caso speciale tali fatti sono ovvi in quanto
$$(S_{f|_\Omega})_x = [0, f(x)) \text{ se } x \in \Omega, \qquad (S_{f|_\Omega})_x = \emptyset \text{ se } x \in X \setminus \Omega$$
e
$$\mathcal{L}^1((S_{f|_\Omega})_x) = (f\chi_\Omega)(x), \quad x \in X;$$
- Si ha
$$(\mu \times \mathcal{L}^1)(S_{f|_\Omega}) = \int \mathcal{L}^1((S_{f|_\Omega})_x)\,d\mu(x) = \int (f\chi_\Omega)(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Nel caso speciale $X = \mathbb{R}^m$ e $\mu = \mathcal{L}^m$, ricordando anche Proposizione 2.6, si trova

$$\mathcal{L}^{m+1}(S_{f|\Omega}) = \int_\Omega f \, d\mathcal{L}^m.$$

Ecco l'enunciato del teorema di approssimazione appena usato (per una dimostrazione vedasi [**5**, Theorem 5.24]).

PROPOSIZIONE 2.7. *Siano dati uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \alpha)$ *e una funzione misurabile* $f : X \to [0, +\infty]$. *Allora esiste una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili* $s_j : X \to \mathbb{R}$ *tali che* $Im(s_j)$ *è finito,* $0 \le s_j \le s_{j+1} \le f$ *e* s_j *converge puntualmente a* f.

Esempi.

5. La formula dell'area

Premessa intuitiva sulle parametrizzazioni. Esempi di parametrizzazione. Una parametrizzazione "bella" può avere immagine non "liscia" e una parametrizzazione "brutta" può avere immagine "liscia".

Enunciamo ora la definizione rigorosa di parametrizzazione regolare.

DEFINIZIONE 2.8. *Siano* n *e* N *due numeri interi positivi tali che* $n \le N$. *Allora una "*(n, N)*-parametrizzazione regolare" (o semplicemente "parametrizzazione regolare") è una mappa* $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ *tale che*

(i) C *è un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *ed esiste un aperto* A *in* $\mathbb{R}^n$ *soddisfacente*
$$C = \overline{A}, \quad \mathcal{L}^n(\partial A) = 0;$$
(ii) $\varphi|_A$ *è iniettiva;*
(iii) φ *è di classe* C^1*, cioè esistono un aperto* U *in* $\mathbb{R}^n$ *e una mappa* $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ *tali che*
$$C \subset U, \quad \Phi|_C = \varphi;$$
(iv) *Per ogni* $x \in A$ *si ha*
$$J\varphi(x) := \Big(\det[D\varphi(x)^t \times D\varphi(x)]\Big)^{1/2} \neq 0.$$
Tale funzione è detta "fattore di trasformazione (associato a φ*)".*

OSSERVAZIONE 2.15. Nelle ipotesi di Definizione 2.8, se $x \in \partial A$ si ha

$$\Big(\det[D\Phi(x)^t \times D\Phi(x)]\Big)^{1/2} = \lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} \Big(\det[D\Phi(a)^t \times D\Phi(a)]\Big)^{1/2} = \lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} J\varphi(a).$$

Quindi la funzione

$$x \mapsto \Big(\det[D\Phi(x)^t \times D\Phi(x)]\Big)^{1/2}, \quad x \in \overline{A} = C$$

non dipende dalla scelta dell'estensione Φ (ma solo da φ) e per questo motivo sarà indicata, quando servirà, con la stessa notazione $J\varphi$.

OSSERVAZIONE 2.16. Adottiamo la notazione introdotta in Definizione 2.8. Allora:

- Per una $(1,N)$-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |\varphi'(x)|, \text{ per ogni } x \in A;$$
- Per una $(2,3)$-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |D_1\varphi(x) \times D_2\varphi(x)|, \text{ per ogni } x \in A;$$
- Per una (n,n)-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |\det D\varphi(x)|, \text{ per ogni } x \in A.$$

Vale il seguente risultato di cui dimostriamo solo il caso delle superfici ($n = 2$, $N = 3$).

PROPOSIZIONE 2.8 (**). *Sia φ una (n,N)-parametrizzazione regolare. Allora $\varphi(A)$ è una sottovarietà n-dimensionale di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1 (dove A è come in Definizione 2.8). Se $x \in A$ allora $\{D_1\varphi(x), \dots, D_n\varphi(x)\}$ è una base dello spazio tangente a $\varphi(A)$ nel punto $\varphi(x)$.*

OSSERVAZIONE 2.17. Considerazioni intuitive ci convincono facilmente del seguente fatto (che si prova rigorosamente combinando la formula dell'area e [**14**, Theorem 6.27]) concernente le curve:

> Se C è un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ è una $(1,N)$-parametrizzazione regolare, allora $\mathcal{H}^1(\varphi(C))$ coincide con l'estremo superiore della lunghezza delle curve poligonali inscritte in $\varphi(C)$.

L'esempio di Schwarz mostra che un fatto analogo non sussiste per le superfici. Infatti esso prova che ogni superficie semicilindrica E è approssimabile (con arbitrario grado di precisione) mediante superfici poliedrali inscritte in E e aventi facce "trasversali" alla stessa E. Ciò consente a tali superfici approssimanti di avere area arbitrariamente grande. In altri termini, l'estremo superiore dell'area delle superfici poliedrali inscritte in E vale $+\infty$.

Trattazione intuitiva della formula dell'area. Le seguenti considerazioni si riferiscono esplicitamente a una $(2,3)$-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$, ma si estendono in modo semplice e naturale a una (n,N)-parametrizzazione regolare.

L'esempio di Schwarz ci fa capire come sia necessario produrre superfici poliedrali approssimanti aventi le facce che "si dispongono sempre di più in posizione tangente a $\varphi(C)$, al crescere del grado di approssimazione". Descriviamo un modo per farlo:

- Preso $P_0 \in A$, siano $T(\varepsilon)$ e $T_\varphi(\varepsilon)$, rispettivamente, il triangolo interno ad A di vertici P_0, $P_0 + (\varepsilon, 0)$, $P_0 + (0, \varepsilon)$ e quello inscritto in $\varphi(C)$ di vertici $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0))$, $\varphi(P_0 + (0, \varepsilon))$. Da

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_1\varphi(P_0), \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_2\varphi(P_0)$$

e poiché $\{D_1\varphi(P_0), D_2\varphi(P_0)\}$ è una base dello spazio tangente a $\varphi(C)$ in $\varphi(P_0)$, concludiamo che il triangolo $T_\varphi(\varepsilon)$ tende a disporsi "in posizione tangente" a $\varphi(C)$ in $\varphi(P_0)$, quando $\varepsilon \to 0$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^2(T_\varphi(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T(\varepsilon))} &= \frac{|[\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)] \times [\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)]|/2}{\varepsilon^2/2} \\ &= \left| \frac{\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} \times \frac{\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} \right| \end{aligned}$$

e quindi (ricordando anche il secondo punto di Osservazione 2.16)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathcal{H}^2(T_\varphi(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T(\varepsilon))} = |D_1\varphi(P_0) \times D_2\varphi(P_0)| = J\varphi(P_0).$$

Il numero $J\varphi(P_0)$ può pertanto essere interpretato come "fattore di trasformazione dell'area indotto da φ in P_0".

- Consideriamo, nel piano, il reticolo triangolare isoscele-retto di passo ε e sia $\{T_i(\varepsilon) \,|\, i = 1, \dots, N(\varepsilon)\}$ la famiglia dei triangoli individuati da tale reticolo che sono contenuti in A. Indichiamo con $P_i(\varepsilon)$ il vertice del triangolo $T_i(\varepsilon)$ corrispondente all'angolo retto e sia $T_{\varphi,i}(\varepsilon)$ il triangolo inscritto in $\varphi(C)$ di vertici $\varphi(P_i(\varepsilon))$, $\varphi(P_i(\varepsilon) + (\varepsilon, 0))$, $\varphi(P_i(\varepsilon) + (0, \varepsilon))$. Allora la superficie poliedrale

$$\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_{\varphi,i}(\varepsilon)$$

è inscritta in $\varphi(C)$ e ha la proprietà "desiderata": le sue facce "tendono a disporsi in posizione tangente" quando $\varepsilon \to 0$. Inoltre, se $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))\mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon)) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon))) \frac{\mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon))} \mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) \\ &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))\delta_i(\varepsilon)\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))J\varphi(P_i(\varepsilon))\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) \end{aligned}$$

dove

$$\delta_i(\varepsilon) := \frac{\mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon))} - J\varphi(P_i(\varepsilon)).$$

La combinazione dei due punti precedenti fornisce uno sketch di prova della formula dell'area per una $(2,3)$-parametrizzazione regolare:

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^2 = \int_A (f\circ\varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^2.$$

Ora possiamo finalmente enunciare efficacemente il teorema generale della formula dell'area, per una dimostrazione completa del quale si rimanda a [**7, 8**] (per esempio).

TEOREMA 2.11 (Formula dell'area). *Siano date una (n,N)-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ e una funzione continua $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$. Allora vale l'identità*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^n = \int_A (f\circ\varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n \left(= \int_C (f\circ\varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n\right).$$

OSSERVAZIONE 2.18. Risalendo direttamente alla definizione di $\mathcal{H}^n$, non è difficile provare che vale la seguente proprietà: Se U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R}^N)$ e K è un sottoinsieme compatto di U tale che $\mathcal{L}^n(K) = 0$, allora si ha anche $\mathcal{H}^n(\Phi(K)) = 0$. Pertanto, nelle ipotesi di Teorema 2.11, essendo $\varphi(C) \setminus \varphi(A) \subset \varphi(\partial A)$, si ha $\mathcal{H}^n(\varphi(C)) = \mathcal{H}^n(\varphi(A))$ e quindi anche

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^n = \int_{\varphi(A)} f\, d\mathcal{H}^n.$$

COROLLARIO 2.5 (°). *Siano $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ e $\psi : K \to \mathbb{R}^N$ due (n,N)-parametrizzazioni regolari aventi la stessa immagine E (i.e. $\varphi(C) = \psi(K) = E$) e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_C (f\circ\varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n = \int_K (f\circ\psi) J\psi\, d\mathcal{L}^n.$$

Da Teorema 2.11 e dai primi due punti di Osservazione 2.16 segue subito il seguente risultato.

COROLLARIO 2.6 (°). *Valgono i seguenti fatti (dove A è come in Definizione 2.8):*

(1) *Se $\gamma : C \to \mathbb{R}^N$ è una $(1,N)$-parametrizzazione regolare e se $f : \gamma(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{\gamma(C)} f\, d\mathcal{H}^1 = \int_A (f\circ\gamma)\, |\gamma'|\, d\mathcal{L}^1;$$

(2) *Se $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una $(2,3)$-parametrizzazione regolare e se $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^2 = \int_A (f\circ\varphi)\, |D_1\varphi \times D_2\varphi|\, d\mathcal{L}^2.$$

Da Teorema 2.11, dal terzo punto di Osservazione 2.16 e da (2) in Teorema 1.10 segue poi la seguente formula per il cambiamento di variabile nell'integrale.

Corollario 2.7 (°). *Se* $\varphi : C \to \mathbb{R}^n$ *è una* (n,n)*-parametrizzazione regolare e se* $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, allora*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{L}^n = \int_A (f \circ \varphi)\, |\det(D\varphi)|\, d\mathcal{L}^n$$

dove A *è come in Definizione 2.8.*

6. Formule di Gauss, Green e Stokes

Per discutere la nozione di orientazione di una parametrizzazione è utile la seguente definizione

Definizione 2.9. (1) *Se* $\gamma : C \to \mathbb{R}^N$ $(C = \overline{A})$ *è una* $(1,N)$*-parametrizzazione regolare, allora il "campo (vettoriale) unitario tangente a* γ*" è definito come segue:*

$$\tau_\gamma : A \to \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau_\gamma := \frac{\gamma'}{|\gamma'|};$$

(2) *Se* $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ $(C = \overline{A})$ *è una* $(2,3)$*-parametrizzazione regolare, allora "il campo (vettoriale) normale a* φ*" è:*

$$\nu_\varphi : A \to \mathbb{S}^2, \quad \nu_\varphi := \frac{D_1\varphi \times D_2\varphi}{|D_1\varphi \times D_2\varphi|}.$$

Passiamo ora a definire le nozioni di curva regolare a tratti e di superficie regolare a tratti.

Definizione 2.10. *Si consideri una famiglia finita di* $(1,N)$*-parametrizzazioni regolari*

$$\gamma_i : C_i \to \mathbb{R}^N \quad (i = 1, \dots, k)$$

tali che, posto $\Gamma_i := \gamma_i(C_i)$ *e* $\Gamma_i^* := \gamma_i(A_i)$ *(ricordiamo che, per Definizione 2.8, esiste un aperto* A_i *tale che* $\overline{A_i} = C_i$ *eccetera...):*

(i) C_i *è un intervallo;*

(ii) $\Gamma_i^* \cap \Gamma_j^* = \emptyset$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$.

Allora $\Gamma := \cup_{i=1}^k \Gamma_i$ *è detta "curva regolare a tratti"(risp. "curva regolare", se* $k = 1$*). Ogni* Γ_i *è detto "tratto regolare" di* Γ*, mentre l'insieme* $\Gamma_i^* := \gamma_i(A_i)$ *è detto "parte interna" di* Γ_i*. Infine, se* τ *è il campo vettoriale definito come segue*

$$\tau : \cup_{i=1}^k \Gamma_i^* \to \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau|_{\Gamma_i^*} := \tau_{\gamma_i} \circ (\gamma_i|_{A_i})^{-1}$$

allora la coppia (Γ, τ) *è detta "curva regolare a tratti orientata"e la famiglia* $\{\gamma_i\}$ *è detta "parametrizzazione" di* (Γ, τ).

Definizione 2.11. *Si consideri una famiglia finita di* $(2,3)$*-parametrizzazioni regolari*

$$\varphi_i : C_i \to \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \dots, k)$$

tali che, posto $\Sigma_i := \varphi_i(C_i)$ *e* $\Sigma_i^* := \varphi_i(A_i)$ *(ricordiamo che, per Definizione 2.8, esiste un aperto* A_i *tale che* $\overline{A_i} = C_i$ *eccetera...):*

(i) ∂C_i *è una curva regolare a tratti;*

(ii) $\Sigma_i^* \cap \Sigma_j^* = \emptyset$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$*.*

Allora $\Sigma := \cup_{i=1}^k \Sigma_i$ *è detta "superficie regolare a tratti"(risp. "superficie regolare", se* $k = 1$*). Ogni* Σ_i *è detto "tratto regolare" di* Σ*, mentre l'insieme* $\Sigma_i^* := \varphi_i(A_i)$ *è detto "parte interna" di* Σ_i*. Infine, se* ν *è il campo vettoriale definito come segue*

$$\nu : \cup_{i=1}^k \Sigma_i^* \to \mathbb{S}^2, \quad \nu|_{\Sigma_i^*} := \nu_{\varphi_i} \circ (\varphi_i|_{A_i})^{-1}$$

allora la coppia (Σ, ν) *è detta "superficie regolare a tratti orientata" e la famiglia* $\{\varphi_i\}$ *è detta "parametrizzazione" di* (Σ, ν)*.*

Osservazione 2.19. Se (Γ, τ) è una curva regolare a tratti orientata, allora τ è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di Γ. Analogamente, se (Σ, ν) è una superficie regolare a tratti orientata, allora ν è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di Σ.

Osservazione 2.20. Valgono i seguenti fatti:

- Se Γ è una curva regolare a tratti, allora si ha
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1\left(\Gamma \setminus \cup_{i=1}^k \Gamma_i^*\right) &= \mathcal{H}^1\left(\cup_{i=1}^k \Gamma_i \setminus \cup_{i=1}^k \Gamma_i^*\right)\\ &\leq \mathcal{H}^1\left(\cup_{i=1}^k (\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*)\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^1(\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*)\\ &= \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^1(\Gamma_i) - \mathcal{H}^1(\Gamma_i^*)\end{aligned}$$
dove, per Osservazione 2.18 e con la notazione di Definizione 2.10, si ha
$$\mathcal{H}^1(\Gamma_i) = \mathcal{H}^1(\gamma_i(C_i)) = \mathcal{H}^1(\gamma_i(A_i)) = \mathcal{H}^1(\Gamma_i^*).$$
Quindi, se per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha una funzione continua e limitata $f_i : \Gamma_i^* \to \mathbb{R}$, allora
$$f : \cup_{i=1}^k \Gamma_i^* \to \mathbb{R}, \quad f|_{\Gamma_i^*} := f_i$$
è una funzione definita $\mathcal{H}^1$-q.o. in Γ e si ha
$$\int_\Gamma f \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\cup_{i=1}^k \Gamma_i^*} f \, d\mathcal{H}^1 = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i^*} f \, d\mathcal{H}^1 = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f_i \, d\mathcal{H}^1.$$

- Se Σ è una superficie regolare a tratti, allora si ha
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2\left(\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right) &= \mathcal{H}^2\left(\cup_{i=1}^k \Sigma_i \setminus \cup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right)\\ &\le \mathcal{H}^2\left(\cup_{i=1}^k (\Sigma_i \setminus \Sigma_i^*)\right)\\ &\le \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^2(\Sigma_i \setminus \Sigma_i^*)\\ &= \sum_{i=1}^k \left(\mathcal{H}^2(\Sigma_i) - \mathcal{H}^2(\Sigma_i^*)\right)\end{aligned}$$
dove, per Osservazione 2.18 e con la notazione di Definizione 2.11, si ha
$$\mathcal{H}^2(\Sigma_i) = \mathcal{H}^2(\varphi_i(C_i)) = \mathcal{H}^2(\varphi_i(A_i)) = \mathcal{H}^2(\Sigma_i^*).$$
Abbiamo così provato che
$$\mathcal{H}^2\left(\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right) = 0.$$
Quindi, se per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha una funzione continua e limitata $f_i : \Sigma_i^* \to \mathbb{R}$, allora
$$f : \cup_{i=1}^k \Sigma_i^* \to \mathbb{R}, \quad f|_{\Sigma_i^*} := f_i$$
è una funzione definita $\mathcal{H}^2$-q.o. in Σ e si ha
$$\int_\Sigma f\, d\mathcal{H}^2 = \int_{\cup_{i=1}^k \Sigma_i^*} f\, d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma_i^*} f\, d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma_i} f_i\, d\mathcal{H}^2.$$

Grazie a Osservazione 2.19 e a Osservazione 2.20 si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.12. *Dati una curva regolare a tratti orientata (Γ, τ) in $\mathbb{R}^N$ e un campo vettoriale continuo $F : \Gamma \to \mathbb{R}^N$, si definisce l'"integrale di F su (Γ, τ)" come segue:*
$$\int_{(\Gamma,\tau)} F := \int_\Gamma F \cdot \tau\, d\mathcal{H}^1.$$
Analogamente, dati una superficie regolare a tratti orientata (Σ, ν) e un campo vettoriale continuo $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, si definisce l'"integrale di F su (Σ, ν)" come segue:
$$\int_{(\Sigma,\nu)} F := \int_\Sigma F \cdot \nu\, d\mathcal{H}^2.$$

Da Definizione 2.10, Definizione 2.11 e Definizione 2.12 segue subito il seguente risultato.

Proposizione 2.9 (*). *Sia (Γ, τ) una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^N$ e sia $F : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo. Allora, se $\{\gamma_i\}$ è una parametrizzazione di (Γ, τ), si ha:*
$$\int_{(\Gamma,\tau)} F = \sum_i \int_{A_i} (F \circ \gamma_i) \cdot \gamma_i'\, d\mathcal{L}^1.$$

Analogamente, sia (Σ, ν) *una superficie regolare a tratti orientata e sia* $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale continuo. Allora, se* $\{\varphi_i\}$ *è una parametrizzazione di* (Σ, ν)*, si ha:*

$$\int_{(\Sigma,\nu)} F = \sum_i \int_{A_i} (F \circ \varphi_i) \cdot (D_1\varphi_i \times D_2\varphi_i)\, d\mathcal{L}^2.$$

DEFINIZIONE 2.13. *Un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}^2$ *è detto "*x_2*-semplice" se esistono due funzioni*

$$f, g \in C([a,b]) \cap C^1(a,b) \qquad (-\infty < a < b < +\infty)$$

aventi grafico di lunghezza finita e tali che

$$E = \{x \in [a,b] \times \mathbb{R} \,|\, f(x_1) \le x_2 \le g(x_1)\} \quad (\textit{in particolare } E \textit{ è compatto}).$$

In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi x_1*-semplici. Un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$ *si dice "semplice" se esso è* x_i*-semplice per* $i = 1, 2$*. Infine chiameremo "insieme composto" ogni unione finita di insiemi semplici* E_i *tali che* $E_i \cap E_j = \partial E_i \cap \partial E_j$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$*.*

DEFINIZIONE 2.14. *Un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}^3$ *è detto "*x_3*-semplice" se esistono una famiglia finita* $\{C_1, \ldots, C_k\}$ *di sottoinsiemi compatti di* $\mathbb{R}^2$ *e due funzioni continue*

$$f, g : C \to \mathbb{R}, \quad C := C_1 \cup \cdots \cup C_k$$

tali che:

(i) $E = \{x \in C \times \mathbb{R} \,|\, f(x_1, x_2) \le x_3 \le g(x_1, x_2)\}$ *(in particolare* E *è compatto);*
(ii) *Ogni* C_i *è la chiusura di un aperto* A_i *la cui frontiera è una curva regolare a tratti;*
(iii) $C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$*;*
(iv) *Per ogni* i*, le funzioni* $f|_{A_i}$ *e* $g|_{A_i}$ *sono di classe* C^1*;*
(v) *Il grafico di* f *e il grafico di* g *hanno area finita.*

In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi x_1*-semplici e gli insiemi* x_2*-semplici. Un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$ *si dice "semplice" se esso è* x_i*-semplice per* $i = 1, 2, 3$*. Infine chiameremo "insieme composto" ogni unione finita di insiemi semplici* E_i *tali che* $E_i \cap E_j = \partial E_i \cap \partial E_j$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$*.*

OSSERVAZIONE 2.21. Se E è un sottoinsieme composto di $\mathbb{R}^2$ (risp. $\mathbb{R}^3$), allora ∂E è una curva (risp. superficie) regolare a tratti. Pertanto ogni funzione continua e limitata nelle parti interne dei tratti regolari di ∂E risulta essere integrabile in ∂E.

Possiamo finalmente enunciare e provare il teorema relativo alle formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$ (Teorema di Gauss della divergenza).

TEOREMA 2.12 (**). *Sia* E *un sottoinsieme composto di* $\mathbb{R}^3$ *e sia* ν *il campo di vettori normali esterni definito nelle parti interne dei tratti regolari di* ∂E*. Allora per ogni funzione* $h : E \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *vale l'identità*

$$\int_E D_i h\, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} h\nu_i\, d\mathcal{H}^2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Quindi, se $F : E \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha
$$\int_E div\, F\, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} F \cdot \nu\, d\mathcal{H}^2.$$
Poiché $(\partial E, \nu)$ è una superficie regolare a tratti orientata, quest'ultima identità si può riscrivere come segue:
$$\int_E div\, F\, d\mathcal{L}^3 = \int_{(\partial E,\nu)} F.$$

Lo stesso argomento prova anche il seguente teorema di Gauss-Green nel piano.

Teorema 2.13 (*). *Si consideri un sottoinsieme composto E di $\mathbb{R}^2$. Sia $\tau_E : (\tau_{E,1}, \tau_{E,2})$ il campo di vettori unitari tangenti a ∂E continuo nelle parti interne dei tratti regolari di ∂E e tale che $\nu_E := (\tau_{E,2}, -\tau_{E,1})$ sia il campo di vettori normali esterni a ∂E. Allora per ogni funzione $h : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 vale l'identità*
$$\int_E D_i h\, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} h\nu_{E,i}\, d\mathcal{H}^1 \qquad (i = 1, 2).$$
Quindi, se $F : E \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha
$$\int_E div\, F\, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} F \cdot \nu_E\, d\mathcal{H}^1.$$
Infine $(\partial E, \tau_E)$ è una curva regolare a tratti orientata e
$$\int_{(\partial E,\tau_E)} F = \int_E (D_1F_2 - D_2F_1)\, d\mathcal{L}^2.$$

Osservazione 2.22. Sia $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare ($C = \overline{A}$, con la notazione di Definizione 2.8). Consideriamo un sottoinsieme composto E di A e definiamo il campo vettoriale τ_E come in Teorema 2.13. Sappiamo allora che $(\partial E, \tau_E)$ è una curva regolare a tratti orientata. Sia $\{\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2 \,|\, i = 1, \dots, k\}$ una sua parametrizzazione e sia (S, ν) la superficie regolare orientata determinata da $\varphi|_E$, i.e.,
$$S := \varphi(E), \quad \nu := \nu_\varphi \circ (\varphi|_E)^{-1} : S \to \mathbb{S}^2.$$
Osserviamo che ogni $\varphi \circ \gamma_i$ è una $(1, 3)$-parametrizzazione regolare e la famiglia $\{\varphi \circ \gamma_i\}$ soddisfa le ipotesi di Definizione 2.10. Pertanto tale famiglia genera una curva regolare a tratti orientata (Γ, τ), dove (ricordando la notazione usata in Definizione 2.10)
$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i = \bigcup_{i=1}^k (\varphi \circ \gamma_i)([a_i, b_i]) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^k \gamma_i([a_i, b_i])\right) = \varphi(\partial E) = \partial S$$
e, per ogni $i = 1, \dots, k$
$$\tau : \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^* \to \mathbb{S}^2, \quad \tau|_{\Gamma_i^*} := \tau_{\varphi\circ\gamma_i} \circ ((\varphi \circ \gamma_i)|_{(a_i,b_i)})^{-1}$$
soddisfa
$$\tau \circ (\varphi \circ \gamma_i)(t) = \frac{(\varphi \circ \gamma_i)'(t)}{|(\varphi \circ \gamma_i)'(t)|}, \quad t \in (a_i, b_i).$$

Vale il seguente teorema di Stokes.

Teorema 2.14 (**). *Nelle ipotesi e con la notazione di Osservazione 2.22, se U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente S e se $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ allora si ha*

$$\int_{(S,\nu)} rot\, F = \int_{(\partial S, \tau)} F$$

e quindi anche

$$\int_{(S,-\nu)} rot\, F = \int_{(\partial S, -\tau)} F.$$

Esempi.

Esempi.

CHAPTER 3

Spazi L^p e serie di Fourier

1. Spazi L^p

OSSERVAZIONE 3.1. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Indichiamo allora con $\mathcal{M}_f$ l'insieme dei maggioranti essenziali di $|f|$ e cioè:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f :&= \{M \in [0, +\infty] \mid M \geq |f(x)| \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\} \\ &= \{M \in [0, +\infty] \mid \mu(\{x \mid M < |f(x)|\}) = 0\}.\end{aligned}$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{M}_f$ è una semiretta destra;
- $\mathcal{M}_f$ è chiusa, i.e. $\inf \mathcal{M}_f \in \mathcal{M}_f$.

DEFINIZIONE 3.1. *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Per ogni funzione misurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, poniamo*

$$\|f\|_p := \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} & \textit{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \min \mathcal{M}_f & \textit{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Indicheremo con $L^p(X)$ la classe delle funzioni misurabili $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\|f\|_p < \infty$.

TEOREMA 3.1 (*). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura, $p \in [1, +\infty]$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Allora*

(1) $\|f\|_p \geq 0$*;*
(2) $\|f\|_p = 0$ *se e solo se* $f = 0$ *quasi ovunque (rispetto a μ);*
(3) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$*, per ogni* $c \in \mathbb{R}$*.*

TEOREMA 3.2 (Disuguaglianza di Hölder (**)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Allora*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove $p, p' \in [1, +\infty]$ sono coniugati, cioè verificano una fra le seguenti ipotesi alternative:

(i) $p = 1$ *e* $p' = +\infty$ *(o viceversa);*

(ii) $p, p' \in (1, +\infty)$ *e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

TEOREMA 3.3 (**). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora, per ogni coppia di funzioni misurabili $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f + g$ sia ben definita (per esempio $f, g \in L^p(X)$), vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textit{Disuguaglianza di Minkowski}).$$

OSSERVAZIONE 3.2. Facendo il quoziente di $L^p(X)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o. (rispetto a } \mu)$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale. Inoltre la funzione

$$L^p(X)/\sim\ \to [0, +\infty), \quad [f] \mapsto |||f|||_p := \|f\|_p \tag{1.1}$$

è una norma. Per semplificare la notazione, è consuetudine denotare tale spazio vettoriale ancora con $L^p(X)$ e identificare $[f]$ con f tutte le volte in cui la formula non dipende dalla scelta della funzione nella classe di equivalenza. Per questo motivo la norma (1.1) della classe di equivalenza di f si indica ancora con $\|f\|_p$.

TEOREMA 3.4 (Fisher-Riesz (***)). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora lo spazio vettoriale normato $(L^p(X)/\sim, |||\cdot|||_p)$ è uno spazio di Banach.*

Dalla dimostrazione di Teorema 3.4 segue subito il seguente risultato, che enunciamo senza ricorrere alla semplificazione notazionale descritta in Osservazione 3.2.

PROPOSIZIONE 3.1 (°). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Allora ogni successione $\{f_j\} \subset L^p(X)$ tale che $\{[f_j]\}$ converge in $L^p(X)/\sim$ ha una sottosuccessione convergente μ-q.o. a una funzione di $L^p(X)$.*

OSSERVAZIONE 3.3. In generale una successione convergente in $L^p(X)$ non converge q.o., fatta eccezione per il caso $p = +\infty$ (esempio della "tendina").

2. Serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, un prontuario minimo (meno di così non si può...)

Introdurremo di seguito qualche elemento di teoria degli spazi di Hilbert (il minimo indispensabile per la trattazione delle serie di Fourier che ci siamo dati come obiettivo della parte finale del corso).

PROPOSIZIONE 3.2 (*). *Se V è uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot\,,\cdot)$, allora la funzione*

$$v \mapsto \|v\| := (v, v)^{1/2}, \qquad v \in V$$

è una norma in V ed è detta "la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot\,,\cdot)$".

DEFINIZIONE 3.2. *Uno "spazio di Hilbert" è uno spazio di Banach in cui la norma è indotta da un prodotto scalare.*

Osservazione 3.4. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura, la norma $|||\cdot|||_2$ è indotta dal prodotto scalare

$$(F, G)_2 := \int_X fg\, d\mu \qquad (F, G \in L^2(X)/\sim)$$

dove $f \in F$ e $g \in G$. Allora $(L^2(X)/\sim, |||\cdot|||_2)$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione 3.3. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora un sottoinsieme F di H è detto "famiglia ortonormale (in H)" se per ogni $x, y \in F$ si ha*

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ 1 & se\ x = y. \end{cases}$$

Una famiglia ortonormale $F \subset H$ si dice "completa (in H)" se soddisfa la seguente condizione: se $h \in H$ è tale che $(h, x) = 0$ per ogni $x \in F$ allora si ha $h = 0$.

Come applicazione del Lemma di Zorn si prova facilmente l'esistenza di famiglie ortonormali complete, e.g. [**5**, Theorem 8.44].

Teorema 3.5. *Ogni spazio di Hilbert H contiene una famiglia ortonormale completa. Se H è separabile allora ogni famiglia ortonormale (in particolare, ogni famiglia ortonormale completa) è numerabile.*

Teorema 3.6 (***). *Sia $F = \{u_1, u_2, \dots\}$ una famiglia ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert H. Valgono allora i seguenti fatti:*

(1) *Se $h \in H$ e $c_1, c_2, \dots$ sono numeri reali, si ha*
$$\Big\|h - \sum_{i=1}^m (h, u_i)u_i\Big\| \leq \Big\|h - \sum_{i=1}^m c_i u_i\Big\|$$
per ogni $m \geq 1$. Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se $c_i = (h, u_i)$, per $i = 1, \dots, m$;

(2) *Per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i)^2 \leq \|h\|^2$ (disuguaglianza di Bessel);*

(3) *Siano $c_1, c_2, \dots$ numeri reali. Allora $\sum_i c_i u_i$ converge in H se e soltanto se $\sum_i c_i^2 < +\infty$. In particolare, per ogni $h \in H$, la serie $\sum_i (h, u_i)u_i$ converge in H. Essa è detta "serie di Fourier di h (relativa alla famiglia F)";*

(4) *Se F è completa, per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i)u_i = h$. In particolare la serie $\sum_i (h, u_i)u_i$ converge incondizionatamente, cioè la sua somma non dipende dall'ordine dei suoi addendi.*

Una importante applicazione della teoria precedente è la cosiddetta "teoria L^2 delle serie di Fourier" che qui descriveremo sommariamente. Prima di tutto si considera lo spazio con misura $([-\pi, \pi], \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$ indotto dalla misura esterna $\varphi := \mathcal{L}^1|_{2^{[-\pi,\pi]}} : 2^{[-\pi,\pi]} \to [0, +\infty]$ e quindi il corrispondente spazio Hilbert $(\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]), |||\cdot|||_2)$, cfr. Osservazione 3.4. Coerentemente a quanto spiegato in Osservazione 3.2, quest'ultimo verrà indicato più semplicemente con la notazione "pre", cioè $(L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$. Inoltre si scriverà spesso $L^2(-\pi,\pi)$ in luogo di $L^2([-\pi,\pi])$.

E' facile provare che il "sistema trigonometrico"

$$F := \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \bigcup \left\{\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\,,\ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

è una famiglia ortonormale in $L^2(-\pi,\pi)$. Osserviamo che se $f \in L^2(-\pi,\pi)$ allora le somme parziali (di ordine dispari) della serie di Fourier di f relativa al sistema trigonometrico (2.1) sono date da

$$S_{2N+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

dove

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\cos(nt)\, d\mathcal{L}^1(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e

$$b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\sin(nt)\, d\mathcal{L}^1(t) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Dalle affermazioni (3) e (2) di Teorema 3.6, rispettivamente, si ottiene allora che se $f \in L^2(-\pi,\pi)$:

- Vale la disuguaglianza di Bessel:

$$\frac{1}{2\pi}(f,1)_2^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(f,\cos(nx))_2^2 + (f,\sin(nx))_2^2\Big] \le \|f\|_2^2. \tag{2.2}$$

- La serie di Fourier di f relativa al sistema trigonometrico (2.1)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{2.3}$$

  converge in $L^2(-\pi,\pi)$. Ciò significa che esiste $g \in L^2(-\pi,\pi)$ tale che

$$\lim_{N\to+\infty} \|g - S_{2N+1}\|_2 = 0.$$

Osservazione 3.5. Dalla disuguaglianza di Bessel (2.2) segue subito che per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\cos(nt)\, d\mathcal{L}^1(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\sin(nt)\, d\mathcal{L}^1(t) = 0.$$

In realtà l'insieme F definito in (2.1) è una famiglia ortonormale completa. Questo fatto si può dimostrare utilizzando i seguenti due risultati di approssimazione. Il primo si ottiene per regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione [**1**, Corollario IV.23], mentre il secondo è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass [**6, 17**].

Teorema 3.7. *Lo spazio vettoriale $C_c(-\pi,\pi)$ è denso in $(L^2(-\pi,\pi)\,,\, \|\cdot\|_2)$.*

Teorema 3.8. *Sia* $\varphi \in C(K)$, *con* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$. *Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tale che* $\sup_K |\varphi - P| \leq \varepsilon$.

Da (4) di Teorema 3.6 segue allora subito il seguente risultato.

Corollario 3.1 (°). *Per ogni* $f \in L^2(-\pi, \pi)$, *la serie di Fourier (2.3) converge incondizionatamente a* f *in* $(L^2(-\pi, \pi)\,,\, \|\cdot\|_2)$.

Combinando Corollario 3.1 e Proposizione 3.1, otteniamo infine:

Corollario 3.2 (°). *Se* $f \in L^2(-\pi, \pi)$, *allora esiste una sottosuccessione di*

$$S_{2N+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{2.4}$$

che converge puntualmente quasi ovunque in $[-\pi, \pi]$ *alla funzione* f.

Osservazione 3.6. Nel 1915 Lusin pose la questione della convergenza quasi ovunque di "tutta" la successione (2.4). La risposta affermativa venne oltre cinquant'anni dopo, in un profondo lavoro di Lennart Carleson [**2**].

3. Convergenza puntuale della serie di Fourier per una funzione regolare a tratti

Per questa ultima parte del corso, la bibliografia di riferimento è il secondo capitolo dell'opera [**9**].

Definizione 3.4. *Sia data una funzione* 2π*-periodica* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Allora:*

(i) f *è detta "continua a tratti" se*
- *l'insieme* D *dei punti di discontinuità di* f *in* $[-\pi, \pi)$ *è vuoto o finito*
- *per ogni* $x_0 \in D$ *esistono finiti i limiti sinistro e destro*

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 -} f(x), \qquad f(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 +} f(x);$$

(ii) f *è detta "regolare a tratti" se:*
- *è continua a tratti secondo la descrizione data in (i);*
- *esiste un sottoinsieme finito* E *di* $[-\pi, \pi)$ *tale che* $E \supset D$ *e* f *ha derivata continua e limitata in* $[-\pi, \pi) \backslash E$.

Vale il seguente risultato sulla convergenza puntuale e sulla convergenza puntuale uniforme.

Teorema 3.9. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica e regolare a tratti. Allora:*

(1) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie di Fourier di f in x è uguale a*
$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$
In particolare, se f è continua in x, allora la serie di Fourier di f in x è uguale a $f(x)$.

(2) *La serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso in cui f è continua;*

(3) *Se f è continua, la sua serie di Fourier converge uniformemente a f.*

Osservazione 3.7. Consideriamo la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

di una funzione 2π-periodica e regolare a tratti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ricordando che
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
e
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 1, 2, \dots),$$
si vede subito che:

(1) Se f è dispari, la (3.1) è una "serie di soli seni", cioè $a_n = 0$ per ogni n e si ha
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 1, 2, \dots);$$

(2) Se f è pari, la (3.1) è una "serie di soli coseni", cioè $b_n = 0$ per ogni n e si ha
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Osservazione 3.8. Naturalmente la teoria della serie di Fourier che abbiamo presentato per le funzioni 2π-periodiche può essere "riformulata" per le funzioni $2L$-periodiche: basta rifare tutto applicando i risultati astratti allo spazio di Hilbert $H := (\mathcal{L}^2([-L, L]), |||\cdot|||_2)$, dove lo spazio con misura considerato stavolta è quello indotto da $\mathcal{L}^1|_{2[-L,L]}$. Per cominciare, il sistema trigonometrico da utilizzare in questo caso è
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi}{L}nx\,,\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{\pi}{L}nx\right\}_{n=1}^{\infty}.$$
Eccetera.

Osservazione 3.9. Dalle serie di Fourier di può ottenere una funzione continua in $\mathbb{R}$ (e 2π-periodica) che non è derivabile in alcun punto, si veda per esempio [**10**, Cap. 2, Sez. 6].

Esempi.

CHAPTER 4

Successioni e serie di funzioni

1. Successioni di funzioni

Definizione 4.1. *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ una successione di funzioni. Allora l'insieme*

$$D := \left\{ x \in X \;\middle|\; \textit{esiste finito } \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right\}$$

è detto "insieme di convergenza puntuale " di $\{f_n\}$. La funzione

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

è detta "(funzione) limite puntuale di $\{f_n\}$"e si scrive: $f_n \to f$ in D.

Definizione 4.2. *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ una successione di funzioni. Allora si dice che "$\{f_n\}$ converge uniformemente in un sottoinsieme E di X a una funzione f" se f è definita nei punti di E e se*

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \; \textit{quando } n \to +\infty.$$

Osservazione 4.1. Se $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ converge uniformemente a f in $E \subset X$ allora f_n converge puntualmente a f in E, cioè $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.

Esempio 4.1. La successione

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

ha come insieme di convergenza $D := (-1, 1]$ e come funzione limite

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Inoltre $\{f_n\}$ converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$, ma non converge uniformemente in $(-1, 1)$ e quindi nemmeno in $(-1, 1]$.

Osservazione 4.2. Consideriamo una funzione $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un insieme $E \subset \mathbb{R}$. Allora le seguenti due proposizioni non sono equivalenti:

(i) g è continua in E;
(ii) $g|_E$ è continua.

Infatti è ovvio che (i) implica (ii), ma in generale il viceversa non vale. Questo si vede molto chiaramente, per esempio, se $g := \chi_{\mathbb{Q}}$ e $E := \mathbb{Q}$. Un caso speciale in cui (i) e (ii) si equivalgono si ha per $X = E$ (i.e., se g è continua).

TEOREMA 4.1 (**). *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni che converge uniformemente in $E \subset X$ a una funzione f. Se le funzioni $f_n|_E$ sono continue in $\overline{x} \in E$, allora anche $f|_E$ è continua in $\overline{x}$. In particolare:*

(1) *Se le $f_n|_E$ sono continue, allora anche $f|_E$ è continua.*
(2) *Se $E = X$ e le f_n sono continue in $\overline{x}$, allora anche $f|_X$ è continua in $\overline{x}$.*

OSSERVAZIONE 4.3. Il fatto che la successione in Esempio 4.1 non converga uniformemente in $(-1, 1]$ segue anche da Teorema 4.1.

OSSERVAZIONE 4.4. Esempio 4.1 mostra che l'ipotesi di convergenza uniforme assunta in Teorema 4.1 non può essere sostituita da quella di convergenza puntuale. Sotto questa ipotesi più semplice la continuità non passa al limite nemmeno quando $D = \mathbb{R}$. Per esempio, se

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ nx & \text{se } x \in (0, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, +\infty) \end{cases}$$

allora $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente alla funzione caratteristica di $(0, +\infty)$ in $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 4.1 (*). *Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora l'insieme*

$$L^\infty(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \,\Big|\, \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty \right\}$$

con le ordinarie operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare delle funzioni è uno spazio vettoriale. Inoltre la mappa

$$L^\infty(E) \to [0, +\infty), \quad f \mapsto \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è una norma, indicata con $\| \cdot \|_{\infty, E}$.

PROPOSIZIONE 4.2 (*). *Sia $E \subset X \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni. Allora:*

(1) *Se $\{f_n\}$ converge uniformemente in E a $f \in L^\infty(E)$, allora $f_n|_E \in L^\infty(E)$ definitivamente e $f_n|_E \to f$ in $L^\infty(E)$;*
(2) *Sia $f_n|_E \in L^\infty(E)$ per ogni n e sia $f \in L^\infty(E)$. Se $f_n|_E \to f$ in $L^\infty(E)$, allora f_n converge uniformemente in E a f.*

OSSERVAZIONE 4.5. La convergenza uniforme in E è più generale di quella in $L^\infty(E)$. Per esempio, consideriamo la successione $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) definita come segue

$$f_n(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{n}, \qquad x \in (0, 1)$$

e sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,1).$$

Allora f_n converge uniformemente a f in $(0,1)$, ma $f, f_n \notin L^\infty((0,1))$.

Proposizione 4.3 (*). *Sia W un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach $(V, \|\cdot\|)$. Allora $(W, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.*

Teorema 4.2 (**). *Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora:*

(1) *$(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$ è uno spazio di Banach;*

(2) *$C_b(E) := C(E) \cap L^\infty(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$ e quindi $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$ è uno spazio di Banach. In particolare se E è compatto, dato che in tal caso $C_b(E) = C(E)$, si ha che $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$ è uno spazio di Banach.*

Osservazione 4.6. Esistono spazi vettoriali normati non completi (osserviamo che tali spazi non possono avere dimensione finita, in quanto ogni spazio vettoriale normato di dimensione finita è completo). Per esempio, consideriamo l'insieme dei polinomi a cofficienti reali in $(0, 1/2)$, cioè

$$\mathcal{P} := \{f|_{(0,1/2)} \mid f \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Allora $\mathcal{P}$ è un sottospazio vettoriale di $L^\infty((0,1/2))$. Consideriamo la successione $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$ con

$$f_n(x) := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n, \quad x \in (0,1/2).$$

Osserviamo che (per ogni n, k con $n, k > 0$):

$$0 < f_{n+k}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1 + x + \ldots + x^{k-1}) < x^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

da cui si ottiene

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{\infty,(0,1/2)} \leq \frac{1/2^{n+1}}{1/2} = \frac{1}{2^n}.$$

Ne segue che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$, quindi anche in $(L^\infty((0,1/2)), \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$. Per Teorema 4.2 esiste $f \in L^\infty((0,1/2))$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,(0,1/2)} = 0.$$

Ma tale f può essere calcolata esplicitamente. Infatti essa deve essere anche il limite puntuale delle f_n, per cui e in effetti sappiamo che

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(1 + x + \ldots + x^n) = \frac{1}{1-x}$$

per ogni $x \in (0,1/2)$. Si vede così che $f \notin \mathcal{P}$.

Dalla formula di Taylor con resto in forma integrale, otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 4.4 (*). *Si considerino $f \in C^\infty(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, dove (a,b) è un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Si supponga inoltre che esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\sup_{x\in(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

per n sufficientemente grande. Allora $f \in L^\infty(a,b)$ e $\lim_{n\to\infty} \|T_{x_0,n} - f\|_{\infty,(a,b)} = 0$, dove $T_{x_0,n}$ indica il polinomio di Taylor di grado n con centro in x_0 (relativo alla funzione f), cioè

$$T_{x_0,n}(x) := f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Vale il seguente teorema di passaggio al limite nell'integrale.

Proposizione 4.5 (*). *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente a f in $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Osservazione 4.7. Proposizione 4.5 segue banalmente dal teorema dalla convergenza dominata di Lebesgue (cfr. Teorema 2.7 e Teorema 2.4), osservando prima che, per n sufficientemente grande, si ha

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} + \|f\|_{\infty,[a,b]} \leq 1 + \|f\|_{\infty,[a,b]}$$

per ogni $x \in [a,b]$

Come corollario otteniamo anche questo risultato sul passaggio al limite della derivata.

Corollario 4.1 (*). *Sia $[a,b]$ un intervatto compatto di $\mathbb{R}$ e consideriamo una successione $\{f_n\} \subset C^1([a,b])$ tale che:*

(i) *$\{f_n\}$ converge puntualmente in $[a,b]$. Sia f il limite;*

(ii) *$\{f_n'\}$ converge in $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$. Sia g il limite.*

Allora $f \in C^1([a,b])$ e più precisamente si ha $f' = g$.

Esempi.

2. Serie di funzioni generiche

Definizione 4.3. *In uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$, consideriamo una successione $\{v_j\} \subset V$. Diremo allora che "la serie dei v_j converge totalmente (in V)" se la serie dei $\|v_j\|$ converge (in $\mathbb{R}$), cioè se $\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^N \|v_j\| < +\infty$. Se una serie converge in senso usuale in $(V, \|\cdot\|)$, d'ora in poi diremo che essa "converge semplicemente (in V)"(per enfatizzare la distinzione fra le due nozioni di convergenza).*

Proposizione 4.6 (*). *Consideriamo uno spazio di Banach* $(V, \|\cdot\|)$ *e una successione* $\{v_j\} \subset V$ *tale che la serie dei* v_j *converge totalmente in* V*. Allora tale serie converge anche semplicemente in* V*.*

Osservazione 4.8. In uno spazio vettoriale normato non completo può capitare che una serie converga totalmente ma non semplicemente. Per esempio consideriamo lo spazio vettoriale definito in Osservazione 4.6, cioè $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$ con

$$\mathcal{P} := \{f|_{(0,1/2)} \mid f \in \mathbb{R}[x]\}.$$

e sia $\{v_j\} \subset \mathcal{P}$ la successione definita da

$$v_j(x) := x^j, \quad x \in (0, 1/2).$$

Allora la serie delle v_j converge totalmente ma non semplicemente in $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty,(0,1/2)})$.

Da Teorema 4.2 e da Proposizione 4.6 seguono subito i seguenti risultati.

Corollario 4.2 (°). *Sia* $E \subset \mathbb{R}$ *e sia* $\{f_j\}$ *una successione in* $L^\infty(E)$ *tale che la serie delle* f_j *converge totalmente in* $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*. Allora tale serie converge anche semplicemente in* $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*.*

Corollario 4.3 (°). *Sia* $E \subset \mathbb{R}$ *e sia* $\{f_j\}$ *una successione in* $C_b(E)$ *tale che la serie delle* f_j *converge totalmente in* $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*. Allora tale serie converge anche semplicemente in* $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*.*

Corollario 4.4 (°). *Sia* $E \subset \mathbb{R}$ *compatto e sia* $\{f_j\}$ *una successione in* $C(E)$ *tale che la serie delle* f_j *converge totalmente in* $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*. Allora tale serie converge anche semplicemente in* $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$*.*

Da Proposizione 4.5 si ottiene subito il seguente teorema di integrazione per serie.

Corollario 4.5 (°). *Sia* $[a, b]$ *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}$ *e consideriamo una successione* $\{f_j\} \subset C([a, b])$ *tale che la serie delle* f_j *converga semplicemente in* $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$*. Allora*

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{+\infty} f_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_a^b f_j.$$

Da Corollario 4.1 segue poi immediatamente il seguente risultato di derivazione per serie.

Corollario 4.6 (°). *Sia* $[a, b]$ *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}$ *e consideriamo una successione* $\{f_j\} \subset C^1([a, b])$ *tale che:*

(i) *La serie delle* f_j *converge puntualmente in* $[a, b]$*. Sia* F *il limite;*

(ii) *La serie delle* f_j' *converge semplicemente in* $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$*.*

Allora $F \in C^1([a,b])$ e più precisamente si ha

$$F' = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j'.$$

Osserviamo che vale il seguente risultato (cfr. Proposizione 4.4).

Corollario 4.7 (°). *Si considerino $f \in C^\infty(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, dove (a,b) è un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Si supponga inoltre che esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\sup_{x\in(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

per n sufficientemente grande. Allora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

converge totalmente in $(C_b(a,b), \|\cdot\|_{\infty,(a,b)})$ e quindi anche semplicemente in $(C_b(a,b), \|\cdot\|_{\infty,(a,b)})$ (per Proposizione 4.6).

3. Serie di potenze

Proposizione 4.7 (*). *Data una serie di potenze*

$$a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j \qquad (a_j \in \mathbb{R}), \tag{3.1}$$

indichiamo con D il suo insieme di convergenza puntuale, i.e.,

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \textit{esiste finito } \lim_{n\to+\infty} a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \right\}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

(1) *Se $y \in D \setminus \{0\}$, allora (3.1) converge totalmente in $(C([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r < |y|$;*

(2) *Posto*

$$R := \sup\{|y| \,:\, y \in D\},$$

si ha

$$(-R,R) \subset D \subset [-R,R].$$

Il numero R è detto "raggio di convergenza della serie di potenze (3.1)";

(3) *Se $R > 0$, la funzione*

$$x \mapsto a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j, \quad x \in (-R,R)$$

è continua.

Proposizione 4.8 (**). *Sia data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad (a_n \in \mathbb{R})$$

con raggio di convergenza R *e poniamo*

$$\rho := \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Allora

$$R = \begin{cases} 0 & se\ \rho = +\infty, \\ \frac{1}{\rho} & se\ \rho \in (0,+\infty) \\ +\infty & se\ \rho = 0. \end{cases}$$

Inoltre, se per n *sufficientemente grande si ha* $a_n \neq 0$ *ed esiste il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

allora tale limite coincide con ρ.

Osservazione 4.9. In generale (se $a_n \neq 0$ definitivamente), non è detto che valga una delle uguaglianze

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \qquad \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho.$$

Un esempio è dato dalla serie

$$x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 6x^6 + \dots$$

per la quale si ha $\rho = 1$ e

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty, \qquad \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.$$

Osservazione 4.10. Stando a (2) di Proposizione 4.7, si possono presentare al più i seguenti casi: $D = (-R, R)$, $D = (-R, R]$, $D = [-R, R)$, $D = [-R, R]$. I seguenti esempi mostrano che questi casi si possono effettivamente presentare tutti e quattro:

- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $(-1, 1)$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $[-1, 1)$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $(-1, 1]$;
- La serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} x^j$ ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza $[-1, 1]$.

Proposizione 4.9 (*). *Le due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Osservazione 4.11. Le due serie di potenze considerate in Proposizione 4.9 possono comportarsi in modo differente negli estremi $\pm R$ dell'insieme di convergenza. Per esempio gli insiemi di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

sono $[-1,1)$ e $(-1,1)$, rispettivamente.

Da Corollario 4.6, Proposizione 4.7 e Proposizione 4.9 segue subito il seguente risultato sulla derivazione delle serie di potenze.

Proposizione 4.10 (**). *Sia data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Allora la funzione

$$x \mapsto S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

appartiene a $C^\infty((-R,R))$ e (per ogni $k \geq 1$) si ha

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}, \quad x \in (-R, R).$$

Esempi.

CHAPTER 5

Complementi

1. Equazioni differenziali ordinarie

Il seguente teorema di punto fisso (di Banach-Caccioppoli) sarà essenziale per provare il successivo teorema di esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy.

TEOREMA 5.1 (**). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia K un sottoinsieme chiuso di X. Inoltre sia $T : K \to K$ una contrazione, cioè esista $q < 1$ tale che*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq q\,\|x_1 - x_2\|$$

per ogni $x_1, x_2 \in K$. Allora esiste uno e un solo $\overline{x} \in K$ tale che $T(\overline{x}) = \overline{x}$.

TEOREMA 5.2 (**). *Consideriamo un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^2$, $F \in C(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo inoltre che F sia localmente y-Lipschitziana in (x_0, y_0), cioè che esistano $r_1 > 0$ e $L > 0$ tali che:*

(i) $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [y_0 - r_1, y_0 + r_1] \subset A$;
(ii) $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *per ogni* $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ *e per ogni* $y_1, y_2 \in [y_0 - r_1, y_0 + r_1]$.

Allora, posto

$$M := \max_Q |F|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min\left\{\frac{r_1}{1+M}, \frac{1}{L}\right\},$$

esiste una e una sola $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [y_0 - r_1, y_0 + r_1])$ tale che $u(x_0) = y_0$ e

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

per ogni $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$.

OSSERVAZIONE 5.1. Consideriamo un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z$, $(x_0, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in A$ e $F \in C(A)$. Inoltre osserviamo che la funzione

$$\Phi(x, z) := (z_2, \dots, z_n, F(x, z))^t, \quad (x, z) \in A$$

è continua. Possiamo allora affermare che il seguente problema di Cauchy per una EDO di ordine n in forma normale

$$(1.1) \qquad \begin{cases} y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = \eta_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1} \end{cases}$$

è equivalente al seguente problema di Cauchy per una EDO vettoriale del primo ordine in forma normale

$$(1.2) \qquad \begin{cases} z'(x) = \Phi(x, z(x)) = (z_2(x), \dots, z_n(x), F(x, z(x)))^t \\ z(x_0) = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^t \end{cases}$$

with $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$. Con ciò intendiamo che:

(i) Se I è un intervallo aperto contenente x_0 e $y(x) \in C^n(I)$ verifica (1.1), allora $z(x) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))^t \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e $z(x)$ verifica (1.2);

(ii) Se I è un intervallo aperto contenente x_0 e $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ verifica (1.2), allora $y(x) := z_1(x) \in C^n(I)$ e $y(x)$ verifica (1.1).

Lo stesso argomento che ha consentito di provare Teorema 5.2, permette di provare facilmente il seguente risultato relativo al problema di Cauchy per una EDO vettoriale del primo ordine in forma normale.

Teorema 5.3 (°). *Consideriamo un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z$, $\Phi \in C(A, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}_x$ e $\eta \in \mathbb{R}^n_z$ tali che $(x_0, \eta) \in A$. Supponiamo inoltre che Φ sia localmente z-Lipschitziana in (x_0, η), cioè che esistano $r_1 > 0$ e $L > 0$ tali che:*

(i) $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times (\eta + [-r_1, r_1]^n) \subset A$;

(ii) $|\Phi(x, \lambda) - \Phi(x, \mu)| \leq L|\lambda - \mu|$ *per ogni* $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ *e per ogni* $\lambda, \mu \in \eta + [-r_1, r_1]^n$.

Allora, posto

$$M := \max_Q |\Phi|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min\left\{ \frac{r_1}{1+M}, \frac{1}{L} \right\},$$

esiste una e una sola $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], \eta + [-r_1, r_1]^n)$ tale che $u(x_0) = \eta$ e

$$u'(x) = \Phi(x, u(x))$$

per ogni $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$.

Tenendo conto di Osservazione 5.1, si ottiene ora facilmente il seguente corollario di Teorema 5.3 relativo all'esistenza e unicità locale della soluzione per il problema di Cauchy per una EDO di ordine n in forma normale.

Corollario 5.1 (*). *Consideriamo un sottoinsieme aperto* A *di* $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^n$, $F \in C(A)$ *e* $(x_0, \eta) \in A$. *Supponiamo inoltre che* F *sia localmente* z*-Lipschitziana in* (x_0, η), *cioè che esistano* $r_1 > 0$ *e* $L > 0$ *tali che:*

(i) $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times (\eta + [-r_1, r_1]^n) \subset A$;

(ii) $|F(x, \lambda) - F(x, \mu)| \leq L|\lambda - \mu|$, *per ogni* $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ *e per ogni* $\lambda, \mu \in \eta + [-r_1, r_1]^n$.

Allora esistono $r_0 \in (0, r_1)$ *e una-e-una-sola* $u \in C^n([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [\eta_0 - r_1, \eta_0 + r_1])$ *tali che*

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)), \ x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0] \\ u(x_0) = \eta_0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}. \end{cases}$$

Corollario 5.2. *Siano* $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), b(x)$ *funzioni continue in un intervallo* (α, β) *e sia* $(x_0, \eta) = (x_0, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$. *Allora esistono due numeri reali* $r_0, r_1 > 0$ *tali che* $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset (\alpha, \beta)$ *e il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x) \\ y(x_0) = \eta_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1} \end{cases} \tag{1.3}$$

ammette una ed una sola soluzione in $C^n([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [\eta_0 - r_1, \eta_0 + r_1])$.

Usando opportuni risultati sul prolungamento delle soluzioni del problema di Cauchy, si giunge a dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.4. *Nelle ipotesi di Corollario 5.2, esiste una e una sola funzione* $u \in C^n((\alpha, \beta))$ *che risolve il problema (1.3).*

Bibliography

[1] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.

[2] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. **116**, 135-157 (1966).

[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.

[4] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.

[5] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995.

[6] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 3; strutture lineari e metriche, continuità. Pitagora Ed. Bologna 2000.

[7] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 4; funzioni di più variabili. Pitagora Ed. Bologna 2005.

[8] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 5; funzioni di più variabili (ulteriori sviluppi). Pitagora Ed. Bologna 2005.

[9] E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003.

[10] E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo. Bollati Boringhieri 2000.

[11] S.G. Krantz, H.R. Parks: The geometry of domains in space. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser 1999.

[12] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.

[13] H.L. Royden: Real Analysis. Prentice Hall College 1988.

[14] W. Rudin: Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill 1976.

[15] S.M. Srivastava: A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics 180, Springer Verlag 1998.

[16] E.M. Stein, R. Shakarchi: Real analysis (measure theory, integration and Hilbert spaces). Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass