Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

11 luglio 2022 - II appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia E la regione compatta del piano racchiusa dalle quattro curve

$$x = 1 - y^2, \quad x = 2 - y^2, \quad y = 0, \quad y = x^{1/2}.$$

Rappresentare graficamente E e calcolare l'integrale

$$\int_E \left(1 + \frac{y^2}{x}\right)^{1/2} dL^2(x, y).$$

Risoluzione. Il sistema

$$\begin{cases} x = s - y^2 \\ y = tx^{1/2} \end{cases}$$

definisce una corrispondenza biunivoca fra i punti $(s, t) \in Q := [1, 2] \times [0, 1]$ e i punti $(x, y) \in E$. Come si vede subito, tale sistema equivale a

$$\begin{cases} x = \frac{s}{1+t^2} \\ y = t\left(\frac{s}{1+t^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{st^2}{1+t^2}\right)^{1/2} = \left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{1/2}. \end{cases}$$

Consideriamo quindi la mappa $\varphi : Q \to E$ definita come segue

$$\varphi(s, t) := \left(\frac{s}{1 + t^2}\, , \left(s - \frac{s}{1 + t^2}\right)^{1/2}\right)^T$$

e osserviamo che

$$D\varphi(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} & \frac{-2st}{(1+t^2)^2} \\ \frac{1}{2}\left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{-1/2}\frac{t^2}{1+t^2} & \left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{-1/2}\frac{st}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Poiché (per $(s,t) \in Q$)

$$\begin{aligned}
J\varphi(s,t) &= |\det D\varphi(s,t)| \\
&= \left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{-1/2} \frac{st}{(1+t^2)^3} + \left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{-1/2} \frac{st^3}{(1+t^2)^3} \\
&= \left(s - \frac{s}{1+t^2}\right)^{-1/2} \frac{st}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{(1+t^2)^{1/2}}{s^{1/2} t} \cdot \frac{st}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{s^{1/2}}{(1+t^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

si ha che φ è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E (cioè un cambio di variabile). Dalla formula dell'area si ottiene pertanto

$$\begin{aligned}
I := {} & \int_{E=\varphi(Q)} \left(1 + \frac{y^2}{x}\right)^{1/2} dL^2 \\
&= \int_Q \left[\left(1 + \frac{y^2}{x}\right)^{1/2}\right]_{(x,y)=\varphi(s,t)} \frac{s^{1/2}}{(1+t^2)^{3/2}}\, dL^2 \\
&= \int_Q (1+t^2)^{1/2} \cdot \frac{s^{1/2}}{(1+t^2)^{3/2}}\, dL^2 \\
&= \int_Q \frac{s^{1/2}}{1+t^2}\, dL^2.
\end{aligned}$$

Dal teorema di Fubini e dal teorema di compatibilità fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, otteniamo infine

$$I = \int_1^2 s^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt\right) ds = \frac{\pi}{6}\left(2^{3/2} - 1\right).$$

2. Si consideri la superficie

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \; z = x^2 + y^2 \right\}$$

e sia $N = (N_1, N_2, N_3)$ il campo normale a S tale che $N_3 > 0$. Si consideri inoltre il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x, z - 1), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si fornisca una rappresentazione grafica qualitativa della curva ∂S;
- Si calcoli $\int_{\partial(S,N)} F$;
- Si calcoli $\operatorname{rot} F$ e si usi la formula di Stokes per calcolare $\int_S N_3 \, dH^2$.

Risoluzione. Una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di $\partial(S, N)$ è data da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con

$$\gamma(t) := (\cos t, 2 \sin t, \cos^2 t + 4 \sin^2 t) = (\cos t, 2 \sin t, 1 + 3 \sin^2 t).$$

Poiché

$$\gamma'(t) = (-\sin t, 2 \cos t, 6 \sin t \cos t), \text{ per ogni } t \in (0, 2\pi),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial(S,N)} F &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, \cos t, 3 \sin^2 t) \cdot (-\sin t, 2 \cos t, 6 \sin t \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 18 \sin^3 t \cos t) \, dt, \end{aligned}$$

cioè

$$\int_{\partial(S,N)} F = 4\pi.$$

Inoltre si vede subito che

$$\operatorname{rot} F = (0, 0, 2)$$

e quindi (per la formula di Stokes)

$$\int_{(S,N)} (0, 0, 2) = \int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(S,N)} F = 4\pi,$$

da cui

$$\int_S 2 N_3 dH^2 = 4\pi.$$

Otteniamo finalmente

$$\int_S N_3 dH^2 = 2\pi.$$

3. Si consideri la funzione 2π-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = x \sin x, \text{ se } x \in [-\pi, \pi).$$

- Tracciare un grafico qualitativo di f;
- Descrivere e motivare le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f;
- Ricavare i coefficienti della serie di Fourier di f.

Risoluzione. Cominciamo dalla descrizione della convergenza.

- Convergenza in $L^2(-\pi, \pi)$: La funzione f è continua e limitata in $(-\pi, \pi)$. In particolare $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e quindi la sua serie di Fourier converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$.
- Convergenza puntuale I (teoria L^2): Per il teorema di Lusin-Carleson, la serie di Fourier di f converge a f puntualmente quasi ovunque in $(-\pi, \pi)$.
- Convergenza puntuale II (teoria RAT): La funzione f è pari e continua in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre essa ha derivata continua e limitata in $[-\pi, \pi) \setminus \{-\pi\}$ e quindi è regolare a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente in $[-\pi, \pi]$ e quindi anche in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora i coefficienti a_n e b_n della serie di Fourier. Poiché (come abbiamo già osservato) la funzione f è pari, si ha

$$b_n = 0 \qquad \text{(per ogni } n \geq 1)$$

e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin t \cos nt \, dt \qquad \text{(per ogni } n \geq 0).$$

Per ricavare l'espressione esplicita di a_n ricordiamoci della seguente identità (che si ricava subito dalla formula di addizione per la funzione sin):

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

Quindi

$$\sin t \cos nt = \frac{\sin(1+n)t + \sin(1-n)t}{2},$$

da cui segue

$$a_n = I_n + J_n$$

dove

$$I_n := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(1+n)t \, dt, \qquad J_n := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(1-n)t \, dt.$$

Si ha (per la formula di integrazione per parti e per il teorema fondamentale del calcolo)

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{-1}{(1+n)\pi} \int_0^\pi tD[\cos(1+n)t]\,dt, \\
&= \frac{-1}{(1+n)\pi} \left[\Big(t\cos(1+n)t] \Big)_0^\pi - \int_0^\pi \cos(1+n)t\,dt \right] \\
&= \frac{-1}{(1+n)\pi} \cdot (-1)^{n+1}\pi \\
&= \frac{(-1)^n}{1+n}
\end{aligned}$$

e, se $n \neq 1$,

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{-1}{(1-n)\pi} \int_0^\pi tD[\cos(1-n)t]\,dt, \\
&= \frac{1}{(n-1)\pi} \left[\Big(t\cos(1-n)t] \Big)_0^\pi - \int_0^\pi \cos(1-n)t\,dt \right] \\
&= \frac{1}{(n-1)\pi} \cdot (-1)^{1-n}\pi \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$J_1 = 0.$$

Concludendo, troviamo

$$a_1 = I_1 + J_1 = -\frac{1}{2}$$

e, per ogni $n \geq 0$ con $n \neq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= I_n + J_n \\
&= \frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} \\
&= \frac{(-1)^n(n-1-n-1)}{n^2-1} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2-1}.
\end{aligned}$$