Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

13 giugno 2022 - I appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \in [-1, 1], \; 2|x| \leq y \leq 1 + x^2, \; z = x + y\}$$

orientata dal campo normale $N = (N_1, N_2, N_3) : S \to \mathbb{S}^2$ tale che $N_3 > 0$. Dopo aver rappresentato graficamente la proiezione di S nel piano xy, si applichi il teorema di Stokes per calcolare l'integrale di campo vettoriale

$$I := \int_{\partial(S,N)} (-y, z^2, x).$$

Risoluzione. Si ha

$$\operatorname{rot}(-y, z^2, x) = (-2z, -1, 1)$$

e quindi, per il teorema di Stokes,

$$I = \int_{(S,N)} \operatorname{rot}(-y, z^2, x) = \int_S (-2z, -1, 1) \cdot N(x, y, z) \, dH^2. \tag{1}$$

Ora osserviamo che S è il grafico della funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [-1, 1], \; 2|x| \leq y \leq 1 + x^2\}, \quad f(x, y) := x + y.$$

Quindi $S = \varphi(A)$, dove $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ è definita come segue

$$\varphi(x, y) := (x, y, f(x, y)) = (x, y, x + y).$$

Poiché

$$D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y) = (-D_1 f(x, y), -D_2 f(x, y), 1) = (-1, -1, 1)$$

si ha

$$J\varphi(x, y) = \|D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)\| = \sqrt{3}$$

e quindi

$$N(\varphi(x, y)) = \frac{D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)}{\|D_1\varphi(x, y) \times D_2\varphi(x, y)\|} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{3}}.$$

Da (1) e dalla formula dell'area si ottiene allora

$$I = \int_A (-2(x+y), -1, 1) \cdot \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\, dL^2 = \int_A 2x + 2y + 2\, dL^2.$$

Concludiamo usando il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{2|x|}^{1+x^2} 2x + 2y + 2\, dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} (2xy + y^2 + 2y)_{y=2|x|}^{y=1+x^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2x + 2x^3 + 1 + 2x^2 + x^4 + 2 + 2x^2 - 4x|x| - 4x^2 - 4|x|\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 + 2x^2 + x^4 + 2 + 2x^2 - 4x^2 - 4|x|\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} 1 + 2x^2 + x^4 + 2 + 2x^2 - 4x^2 - 4|x|\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} 3 - 4x + x^4\, dx \\
&= 2\left(3x - 2x^2 + \frac{x^5}{5} \right)_{x=0}^{x=1},
\end{aligned}$$

cioè

$$I = \frac{12}{5}.$$

2. Fornire una rappresentazione grafica qualitativa dell'insieme

$$E := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2)^{3/2} \le z^2+1,\ z \in [0,2]\Big\}$$

e calcolare l'integrale

$$I := \int_E \frac{3|x|}{(1+z^2)^2}\, dL^3(x,y,z).$$

Risoluzione. Osserviamo che per $z \in [0,2]$ la sezione E_z è il disco di raggio $(z^2+1)^{1/3}$ centrato nell'origine, cioè

$$E_z = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^{1/2} \le (z^2+1)^{1/3}.\Big\}$$

Ovviamente, se $z \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$ si ha $E_z = \emptyset$. L'insieme E è dunque il solido che si ottiene ruotando intorno all'asse z la regione del piano yz data dal sottografico della funzione $z \mapsto (z^2+1)^{1/3}$, con $z \in [0,2]$. Dal teorema di Fubini (sezioni piane parallele al piano xy) otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_{E_z} \frac{3|x|}{(1+z^2)^2}\, dL^2(x,y) \right) dz \\ &= \int_0^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \left(\int_{E_z} 3|x|\, dL^2(x,y) \right) dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Inoltre, usando la $(2,2)$-parametrizzazione di E_z (cambio di coordinate polari-cartesiane)

$$\varphi : C_z := [0,2\pi] \times [0,(z^2+1)^{1/3}] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta,\rho) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

applicando la formula dell'area (memo: $J\varphi(\theta,\rho) = \rho$) e di nuovo il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{E_z = \varphi(C_z)} 3|x|\, dL^2(x,y) &= \int_{C_z} 3|\rho\cos\theta|\rho\, dL^2(\theta,\rho) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{(z^2+1)^{1/3}} 3\rho^2 |\cos\theta|\, d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, (\rho^3)_{\rho=0}^{\rho=(z^2+1)^{1/3}}\, d\theta \\ &= 4(z^2+1) \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \\ &= 4(z^2+1). \end{aligned}$$

Da questo risultato e da (2) segue ora

$$I = \int_0^2 \frac{4(z^2+1)}{(1+z^2)^2}\, dz = 4\int_0^2 \frac{1}{1+z^2}\, dz = 4\arctan 2.$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, dove
$$f_n(x) := \frac{2n^x - n^{2x}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione.
Convergenza puntuale. Si vede subito che:

- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, se $x < 0$;
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Inoltre
$$f_n(x) = \frac{n^{2x}\left(\frac{2}{n^x} - 1\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n^{2x-1}\left(\frac{2}{n^x} - 1\right)}{1+\frac{1}{n}}$$
e quindi:

- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, se $0 < x < 1/2$;
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(1/2) = -1$;
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, se $x > 1/2$.

Si ha dunque
$$D = (-\infty, 1/2], \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1/2) \\ -1 & \text{se } x = 1/2. \end{cases}$$

Convergenza uniforme.

- Poiché f è discontinua in $1/2$ e ogni f_n è continua in $D = (-\infty, 1/2]$, non si ha convergenza uniforme in $D = (-\infty, 1/2]$ (per il teorema di "trasmissione della continuità").
- Non si ha convergenza uniforme in $(-\infty, 1/2)$. Infatti
$$\sup_{x\in(-\infty,1/2)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,1/2)} |f_n(x)| \geq |f_n(1/2)|.$$
Quindi, se si avesse convergenza uniforme in $(-\infty, 1/2)$, si troverebbe
$$|f(1/2)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(1/2)| \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(-\infty,1/2)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$
e si giungerebbe così a un assurdo (essendo $f(1/2) = -1$).

Per esaminare gli altri casi, ci sarà utile studiare le proprietà di monotonia di f_n. A tal fine osserviamo prima di tutto che
$$f_n(x) \text{ è } \begin{cases} > 0 & \text{se } x < \ln 2/\ln n \\ = 0 & \text{se } x = \ln 2/\ln n \\ < 0 & \text{se } x > \ln 2/\ln n. \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$f_n'(x) = \frac{2n^x \ln n - 2n^{2x} \ln n}{n+1} = \frac{2n^x(1-n^x)\ln n}{n+1}$$

e quindi:

$$f_n \text{ è } \begin{cases} \text{crescente in } (-\infty, 0] \\ \text{stazionaria in } 0 \\ \text{decrescente } [0, +\infty). \end{cases}$$

Da tutto questo segue che:

- Se $a \in (0, 1/2)$, si ha convergenza uniforme in $(-\infty, a]$. Infatti

  $$\sup_{x\in(-\infty,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,a]} |f_n(x)| = \max\{f_n(0), |f_n(a)|\} \leq f_n(0) + |f_n(a)|$$

  e anche

  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) + |f_n(a)| = f(0) + |f(a)| = 0.$$