Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

15 febbraio 2023 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq 0,\, y \geq 1\right\}$$

e calcolare

$$\int_E xy \cos(x^2 + y^2)\, dL^2.$$

Risoluzione. Osserviamo che $E_y = \emptyset$ se $y \in \mathbb{R} \setminus [1, 2]$, mentre

$$E_y = [0, (4 - y^2)^{1/2}] \text{ se } y \in [1, 2].$$

Quindi, applicando il teorema di Fubini (sezioni orizzontali), otteniamo

$$I := \int_E xy \cos(x^2 + y^2)\, dL^2 = \int_1^2 y \left(\int_0^{(4-y^2)^{1/2}} x \cos(x^2 + y^2)\, dx \right) dy.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, si ha anche (per ogni $y \in [1, 2]$)

$$\begin{aligned} \int_0^{(4-y^2)^{1/2}} x \cos(x^2 + y^2)\, dx &= \frac{1}{2} \left[\sin(x^2 + y^2)\right]_{x=0}^{x=(4-y^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 4 - \sin y^2\right). \end{aligned}$$

Quindi, usando di nuovo il teorema fondamentale del calcolo, troviamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 y \left(\sin 4 - \sin y^2\right) dy \\ &= \frac{\sin 4}{4} [y^2]_{y=1}^{y=2} + \frac{1}{4} [\cos y^2]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{3 \sin 4}{4} + \frac{\cos 4 - \cos 1}{4}. \end{aligned}$$

2. Si consideri la semisfera

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

e sia $N = (N_1, N_2, N_3)$ il campo normale a S tale che $N_3 \geq 0$. Inoltre sia $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito come segue:

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Verificare che vale l'identità di Stokes

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(S,N)} F.$$

Risoluzione. Dalla definizione di $\operatorname{rot} F$ si trova subito

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (2y, -2x, 2x - 2y) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Osservando che

$$N(x, y, z) = (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in S),$$

otteniamo pertanto

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, dH^2 = \int_S 2z(x - y) \, dH^2.$$

Pensando alla simmetria di S, è facile intuire che quest'ultimo integrale è nullo. Per verificarlo, consideriamo la seguente $(2, 3)$-parametrizzazione regolare $\varphi : R := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di S

$$\varphi(\alpha, \beta) := (\sin\alpha \cos\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha) \qquad ((\alpha, \beta) \in R),$$

osserviamo che

$$J\varphi(\alpha, \beta) = \sin\alpha \qquad ((\alpha, \beta) \in (0, \pi/2) \times (0, 2\pi))$$

e applichiamo la formula dell'area e il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{S=\varphi(R)} 2z(x - y) \, dH^2 &= \int_R 2\cos\alpha(\sin\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) \sin\alpha \, dL^2 \\
&= 2 \int_R \cos\alpha \sin^2\alpha (\cos\beta - \sin\beta) \, dL^2 \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \sin^2\alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} (\cos\beta - \sin\beta) \, d\beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che il primo membro dell'identità di Stokes è nullo, i.e.,

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = 0.$$

Rimane da provare che si ha anche

$$\int_{\partial(S,N)} F = 0.$$

A questo proposito, indichiamo con $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ il campo vettoriale unitario tale che $\partial(S, N) = (\partial S, \tau)$ e osserviamo che ∂S è la circonferenza unitaria del piano xy centrata nell'origine. Quindi, per ogni $(x, y, z) \in \partial S$ si ha

$$\tau_3(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$$

e perciò anche

$$F(x, y, z) \cdot \tau(x, y, z) = 0.$$

Questo permette di concludere che effettivamente si ha

$$\int_{\partial(S,N)} F = \int_{(\partial S,\tau)} F = \int_{\partial S} F \cdot \tau \, dH^1 = 0.$$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e 2π-periodica tale che $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}, \ \text{ se } x \in (0, \pi].$$

(i) Tracciare il grafico qualitativo di f in un intorno di 0.

(ii) Provare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

(iii) Calcolare i coefficienti a_0 e b_n (per ogni $n \geq 1$) della serie di Fourier di f.

(iv) La funzione f è regolare a tratti? Motivare la risposta.

(v) Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f.

Risoluzione.

(i) Osserviamo che per $x \in (0, \pi]$ si ha

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x}\sqrt{x}$$

e ricordiamo che

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Quindi in un intorno destro di 0, sufficientemente piccolo, il grafico qualitativo di f coinciderà con quello della funzione $x \mapsto \sqrt{x}$. A questo punto basta ricordare che f è pari.

(ii) Poiché $y = x$ è la retta tangente al grafico della funzione $x \mapsto \ln(1+x)$ in $(0, 0)$, si ha

$$\ln(1+x) \leq x, \ \text{ per ogni } x > -1.$$

Quindi, per ogni $x \in (0, \pi)$ si ha

$$f(x)^2 = \frac{[\ln(1+x)]^2}{x} \leq \frac{x^2}{x} = x.$$

Ricordando che f è pari, ne segue che $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

(iii) Poiché f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre, usando la formula di integrazione per parti e la formula per il cambiamento di variabile nell'integrale ($t = s^2$), troviamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\, dt \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(1+t) D(\sqrt{t})\, dt \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\Big[\sqrt{t} \ln(1+t) \Big]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\sqrt{\pi} \ln(1+\pi) - \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{s}{1+s^2}\, 2s\, ds \right)
\end{aligned}$$

dove, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{s}{1+s^2}\, 2s\, ds &= 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{s^2}{1+s^2}\, ds \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{s^2+1-1}{1+s^2}\, ds \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(1-\frac{1}{1+s^2}\right) ds \\
&= 2\left[s-\arctan s\right]_{s=0}^{s=\sqrt{\pi}} \\
&= 2\left(\sqrt{\pi}-\arctan\sqrt{\pi}\right).
\end{aligned}$$

Quindi

$$a_0 = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\ln(1+\pi)}{2} - 1 + \frac{\arctan\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\right).$$

(iv) La funzione f non è regolare a tratti perché (come si intuisce dalle osservazioni del punto (i)) essa è derivabile ma non limitata. Infatti, per $x \in (0,\pi)$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{2}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty.$$

(v) Poiché $f \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Inoltre, per il teorema di Lusin-Carleson, essa converge puntualmente quasi ovunque a f.