Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

16 gennaio 2023 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Si consideri il cubo $Q := [-1,1]^3$ e il piano P di equazione $x + y + z = 2$.

- Rappresentare graficamente la curva $\Gamma := P \cap \partial Q$;
- Calcolare l'integrale
$$\int_\Gamma (x-1)(y-1)z \, dH^1.$$

Risoluzione. Poniamo

$$A := (1,0,1), \quad B := (1,1,0), \quad C := (0,1,1)$$

e

$$f(x,y,z) = (x-1)(y-1)z.$$

Si vede facilmente che:

(1) $\Gamma = AB \cup BC \cup AC$;

(2) Tutti i punti del segmento AB hanno la coordinata x uguale a 1 e quindi $f|_{AB} = 0$;

(3) Tutti i punti del segmento BC hanno la coordinata y uguale a 1 e quindi $f|_{BC} = 0$.

Allora

$$\begin{aligned} I := \int_\Gamma (x-1)(y-1)z \, dH^1 &= \int_{AB} f \, dH^1 + \int_{BC} f \, dH^1 + \int_{AC} f \, dH^1 \\ &= \int_{AC} f \, dH^1. \end{aligned}$$

Una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di AC è data da

$$\begin{aligned} \gamma(t) :&= A + t(C - A) \\ &= (1,0,1) + t[(0,1,1) - (1,0,1)] \\ &= (1-t, t, 1) \end{aligned}$$

con $t \in [0,1]$. Osservando che (per ogni $t \in (0,1)$)

$$J\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| = \|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}$$

e usando la formula dell'area, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{AC=\gamma([0,1])} f \, dH^1 \\ &= \int_{[0,1]} f(\gamma(t)) J\gamma(t) \, dL^1(t) \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 f(1-t,t,1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 -t(t-1) \, dt. \end{aligned}$$

La conclusione segue dal teorema fondamentale del calcolo:

$$I = \sqrt{2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right)_{t=0}^{t=1} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

s

2. Sia L l'insieme dei punti $(0, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che non appartengono al quadrato di vertici

$$(0,1,0), \quad (0,0,1), \quad (0,-1,0), \quad (0,0,-1)$$

e soddisfano

$$y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

Inoltre, sia E il solido ottenuto dalla rotazione completa di L intorno all'asse z.

- Dare una rappresentazione grafica di L;
- Usare il teorema di Gauss della divergenza per calcolare

  $$\int_{(\partial E, N)} (x^3 z, y^3 z, \sin xy),$$

  dove N è il campo normale esterno a ∂E.

Risoluzione. Dal teorema di Gauss della divergenza segue che

$$\begin{aligned} I := \int_{(\partial E, N)} (x^3 z, y^3 z, \sin xy) &= \int_E \operatorname{div}(x^3 z, y^3 z, \sin xy)\, dL^3 \\ &= \int_E 3z(x^2 + y^2)\, dL^3 \end{aligned}$$

Applicando ora il teorema di Fubini per sezioni piane orizzontali (i.e., parallele al piano xy), otteniamo

$$I = \int_{[0,1]} 3z \left(\int_{E_z} (x^2 + y^2)\, dL^2(x,y) \right) dL^1(z). \tag{1}$$

Osserviamo che (fissato $z \in [0,1]$) la sezione E_z è la corona circolare di raggi $1-z$ e $(1-z^2)^{1/2}$, per la quale si ha la $(2,2)$-parametrizzazione regolare (cambio di variabili cartesiane-polari)

$$\varphi : R := [0, 2\pi] \times [1 - z, (1 - z^2)^{1/2}] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta, \rho) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Ricordando che $J\varphi(\theta, \rho) = \rho$, usando la formula dell'area, il teorema di Fubini e il teorema fondamentale del calcolo, troviamo intanto

$$\begin{aligned} \int_{E_z = \varphi(R)} (x^2 + y^2)\, dL^2(x,y) &= \int_R (\rho^2 \cos \theta + \rho^2 \sin \theta) \rho \, dL^2(\theta, \rho) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{1-z}^{(1-z^2)^{1/2}} \rho^3 \, d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{4} [(1 - z^2)^2 - (1 - z)^4] \\ &= 2\pi (z - 2z^2 + z^3). \end{aligned}$$

Da questa e da (1), applicando un'altra volta il teorema fondamentale del calcolo, segue infine

$$I = 6\pi \int_0^1 (z^2 - 2z^3 + z^4)\, dz = 6\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{5}.$$

3. Per $n = 1, 2, \ldots$ sia $f_n : [0, +\infty) \setminus \{n\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come segue

$$f_n(x) := \arctan \frac{x^{n+1}}{n - x}, \quad x \in [0, +\infty) \setminus \{n\}.$$

- Disegnare un grafico qualitativo di f_n;
- Studiare la convergenza puntuale di $\{f_n\}$;
- Studiare la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ negli intervalli compatti.

Risoluzione.

- Grafico qualitativo. Osserviamo che f_n è derivabile (e quindi anche continua) in ogni $x \in [0, +\infty) \setminus \{n\}$ e si ha

$$f_n'(x) = \frac{n x^n (n + 1 - x)}{(x - n)^2 + x^{2n+2}}.$$

  Da questa formula (e dall'espressione di f_n) seguono subito le seguenti proprietà, che consentono di disegnare molto facilmente il grafico di f_n:

  (1) f_n è crescente in $[0, n)$, $f_n(0) = 0$, $\lim_{x \to 0+} f_n'(x) = 0$, $\lim_{x \to n-} f_n(x) = \pi/2$;
  (2) $\lim_{x \to n} f_n'(x) = n^{-n-1}$;
  (3) f_n è crescente in $(n, n + 1]$, $\lim_{x \to n+} f_n(x) = -\pi/2$;
  (4) f_n è decrescente in $[n + 1, +\infty)$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\pi/2$ (in particolare, f_n ha un massimo locale in $n + 1$);

- Convergenza puntuale. Si vede subito che:

  (5) Se $x \in [0, 1)$ allora $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$;
  (6) $\lim_{n \to +\infty} f_n(1) = 0$;
  (7) Se $x \in (1, +\infty)$ allora $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \pi/2$.

  Quindi, indicati con D ed f, rispettivamente, l'insieme di convergenza puntuale e il limite puntuale (della successione $\{f_n\}$), si ha

$$D = [0, +\infty), \quad f := \frac{\pi}{2} \chi_{(1,+\infty)}.$$

- Convergenza puntuale negli intervalli compatti. Si hanno i seguenti casi:

  (8) Se $1 \in (a, b)$ allora $f|_{[a,b]}$ non è continua e quindi non si ha convergenza uniforme in $[a, b]$. Analogamente, non si ha convergenza uniforme in $[1, b]$ (quale che sia $b > 1$);

(9) Tenuto conto della proprietà (1), si vede subito che

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1).$$

Poiché $1 \in D$, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f(1) = 0.$$

Questo prova che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[0,1]$.

(10) Osserviamo prima di tutto che se $1 < a < b < +\infty$ allora $[a,b]$ è contenuto in $[0,n)$ definitivamente. Quindi, richiamando di nuovo la proprietà (1), troviamo

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} (\pi/2 - f_n(x)) = \pi/2 - f_n(a).$$

Poiché $a \in D$, otteniamo allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f(a) = 0.$$

Pertanto $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[a,b]$.