Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

31 agosto 2022 - III appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Si consideri l'insieme

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in [1, 2]\}$$

e la mappa

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) := (zx, zy, z).$$

- Rappresentare graficamente $\varphi(C)$;
- Provare che φ è una $(3, 3)$-parametrizzazione regolare;
- Calcolare

$$\int_{\varphi(C)} \frac{x^2 + y^2}{z}\, dL^3.$$

Risoluzione. La mappa φ è una $(3, 3)$-parametrizzazione regolare. Infatti:

(i) C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$ e si ha

$$C = \overline{A}, \quad L^3(\partial A) = 0$$

dove $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 1,\ z \in (1, 2)\}$. Ovviamente A è aperto.

(ii) $\varphi|_A$ è iniettiva in quanto, se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ appartengono ad A e sono tali che $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ allora

$$z_1 x_1 = z_2 x_2, \quad z_1 y_1 = z_2 y_2, \quad z_1 = z_2.$$

Grazie alla terza uguaglianza (e osservando che $z_1 = z_2 \in [1, 2]$), le prime due uguaglianze si semplificano e si ottiene

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2,$$

ossia $P_1 = P_2$.

(iii) La mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x, y, z) := (zx, zy, z)$$

è di classe C^1 e si ha $\Phi|_C = \varphi$. Quindi φ è di classe C^1.

(iv) Per ogni $(x, y, z) \in A$ si ha

$$D\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 0 & z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$J\varphi(x, y, z) = |\det D\varphi(x, y, z)| = z^2 \neq 0.$$

Usando la formula dell'area e il teorema di Fubini, ora si può calcolare facilmente l'integrale

$$\begin{aligned} I := \int_{\varphi(C)} \frac{x^2 + y^2}{z} \, dL^3 &= \int_C \frac{z^2x^2 + z^2y^2}{z} \, z^2 \, dL^3 \\ &= \int_C z^3(x^2 + y^2) \, dL^3 \\ &\int_{[1,2]} \left(\int_D z^3(x^2 + y^2) \, dL^2(x, y) \right) dL^1(z) \end{aligned}$$

dove D è il disco in $\mathbb{R}^2_{xy}$ di raggio 1 e centrato nell'origine. Inoltre, usando di nuovo la formula dell'area per cambiare le coordinate da cartesiane a polari e in seguito il teorema di Fubini, si trova

$$\begin{aligned} \int_D z^3(x^2 + y^2) \, dL^2(x, y) &= z^3 \int_D (x^2 + y^2) \, dL^2(x, y) \\ &= z^3 \int_{[0,2\pi]\times[0,1]} \rho^3 dL^2(\theta, \rho) \\ &= z^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} z^3. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{\pi}{2} \int_1^2 z^3 dz = \frac{15\pi}{8}.$$

2. Provare che la mappa

$$\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(\theta) := (0, 2\cos^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta)$$

è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare della circonferenza unitaria centrata in $(0,1,0)$ e contenuta nel piano yz. Indicata con C tale circonferenza, sia $\Gamma := [0,1] \times C$. Rappresentare graficamente Γ, scrivere una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di Γ e calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma x|z| \, dH^2.$$

Risoluzione. Ricordiamo che

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

e

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

Allora

$$\gamma(\theta) = (0, 1 + \cos(2\theta), \sin(2\theta)) = (0,1,0) + (0, \cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

per ogni $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Da questa espressione si vede subito che:

- $\gamma([-\pi/2, \pi/2]) = C$;
- $\gamma|_{(-\pi/2,\pi/2)}$ è iniettiva;
- γ è di classe C^1;
- per ogni $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ si ha

  $$\|\gamma'(\theta)\| = \|(0, -2\sin(2\theta), 2\cos(2\theta))\| = 2.$$

  Quindi γ è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare di C.

A questo punto si verifica facilmente che, posto $R := [0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$, la mappa

$$\varphi : R \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t,\theta) := (t, 2\cos^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta)$$

è una $(2,3)$-parametrizzazione regolare del cilindro Γ e in particolare si trova subito che

$$J\varphi(t,\theta) = \|D_1\varphi(t,\theta) \times D_2\varphi(t,\theta)\| = 2.$$

Quindi, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini, si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma=\varphi(R)} x|z|\, dH^2 &= \int_R t|2\cos\theta\sin\theta|\, 2\, dL^2(t,\theta) \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2t|2\cos\theta\sin\theta|\, d\theta \right) dt \\
&= \left(\int_0^1 2t\, dt \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |2\cos\theta\sin\theta|\, d\theta \right) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} D(\sin^2)(\theta)\, d\theta \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Risoluzione.

Convergenza puntuale. Sia D l'insieme dei punti in cui la serie assegnata converge. Allora:

- Si ha ovviamente $0 \in D$;
- Per ogni $x \neq 0$, vale

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{n+1}\sin(\frac{x}{n+1})}{x^n \sin(\frac{x}{n})} \right| = \lim_{n\to+\infty} |x| \left| \frac{\sin(\frac{x}{n+1})}{\frac{x}{n+1}} \right| \left| \frac{\frac{x}{n}}{\sin(\frac{x}{n})} \right| \frac{n}{n+1} = |x|.$$

  Quindi , grazie al criterio del rapporto per le serie numeriche, si trova

$$(-1,1) \subset D, \quad [-1,1]^c \subset D^c$$

  e cioè

$$(-1,1) \subset D \subset [-1,1].$$

- Si ha $1 \notin D$. Infatti, per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

  e poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$, possiamo concludere che la serie (1) diverge grazie al confronto asintotico con la serie armonica;
- Si ha $-1 \in D$. Infatti, per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

  e questa converge per il criterio di Leibniz.

I punti precedenti provano che

$$D = [-1,1).$$

Convergenza totale. Se poniamo

$$f_n(x) := x^n \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

allora:

- Si ha

$$\|f_n\|_{\infty,[-1,1)} = \sup_{x\in[-1,1)} |x^n \sin(x/n)| = \sin(1/n).$$

Quindi, dato che $1 \notin D$, la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,[-1,1)}$ diverge, cioè la serie assegnata non converge totalmente in $(C_b([-1,1)), \|\cdot\|_{\infty,[-1,1)})$. Analogamente

$$\|f_n\|_{\infty,(-1,1)} = \sup_{x\in(-1,1)} |x^n \sin(x/n)| = \sin(1/n).$$

e quindi la serie assegnata non converge totalmente in $(C_b((-1,1)), \|\cdot\|_{\infty,(-1,1)})$.

- Per ogni $r \in (0,1)$ si ha

$$\|f_n\|_{\infty,[-r,r]} = \sup_{x\in[-r,r]} |x^n \sin(x/n)| = r^n \sin(r/n).$$

Allora, poiché $r \in D$, si vede che $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,[-r,r]}$ converge. Ciò significa che la serie assegnata converge totalmente in $(C([-r,r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$ e quindi anche uniformemente in $[-r,r]$.