Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2021/2022

15 febbraio 2023 - V appello

* * *

1. Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 1\right\}$$

e calcolare

$$\int_E xy \cos(x^2 + y^2)\, dL^2.$$

2. Si consideri la semisfera

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

e sia $N = (N_1, N_2, N_3)$ il campo normale a S tale che $N_3 \geq 0$. Inoltre sia $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito come segue:

$$F(x,y,z) := (x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Verificare che vale l'identità di Stokes

$$\int_{(S,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(S,N)} F.$$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e 2π-periodica tale che $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}, \text{ se } x \in (0, \pi].$$

(i) Tracciare il grafico qualitativo di f in un intorno di 0.

(ii) Provare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

(iii) Calcolare i coefficienti a_0 e b_n (per ogni $n \geq 1$) della serie di Fourier di f.

(iv) La funzione f è regolare a tratti? Motivare la risposta.

(v) Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f.