Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2022/2023

16 giugno 2023 - I appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1,\ -1-y/2 \le z \le 2+y\}.$$
Calcolare
$$\int_S (y-x)\,dH^2.$$

Risoluzione. Posto
$$E := \left\{(\theta,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \theta \in [0,2\pi],\ t \in \left[-1-\frac{\sin\theta}{2}, 2+\sin\theta\right]\right\},$$
una $(2,3)$-parametrizzazione regolare di S è data da
$$\varphi : E \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta,t) := (\cos\theta, \sin\theta, t)$$
Si verifica facilmente che
$$J\varphi(\theta,t) = \|D_1\varphi(\theta,t) \times D_1\varphi(\theta,t)\| = 1$$
per ogni (θ,t), punto interno di E. Quindi, applicando la formula dell'area e il teorema di Fubini, si ottiene
$$\begin{aligned}
\int_{S=\varphi(E)} (y-x)\,dH^2 &= \int_E (\sin\theta-\cos\theta)\,dL^2(\theta,t)\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1-\frac{\sin\theta}{2}}^{2+\sin\theta}(\sin\theta-\cos\theta)\,dt\right)d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\left[2+\sin\theta-\left(-1-\frac{\sin\theta}{2}\right)\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\left(3+\frac{3}{2}\sin\theta\right)d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(3\sin\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta-3\cos\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\sin\theta\right)d\theta\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2. Posto $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-1)^2 < 1\}$, si consideri la funzione

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 2 - \frac{x^2+y^2}{y}.$$

- Verificare che $f(D) = (0,2)$;
- Descrivere (anche graficamente) le sezioni E_z del sottografico di f

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D,\ 0 < z < f(x,y)\};$$

- Scrivere l'espressione integrale relativa al flusso Φ del campo vettoriale $(x,y,z) \mapsto (xz^2, y^2, -2yz)$, con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, uscente da E. Calcolare Φ, usando il teorema della divergenza, il punto precedente e il teorema di Fubini.

Risoluzione.

- Ovviamente si ha

$$f(x,y,z) < 2, \text{ per ogni } (x,y,z) \in D. \tag{1}$$

Inoltre

$$f(x,y) = \frac{2y - x^2 - y^2}{y} = \frac{1 - [x^2 + (y-1)^2]}{y}$$

e quindi

$$f(x,y) > 0, \text{ per ogni } (x,y) \in D. \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che

$$f(D) \subset (0,2). \tag{3}$$

Inoltre, essendo $f(0,y) = 2 - y$, si vede subito che

$$f(D) \supset f(D \cap \mathbb{R}_y) = \{f(0,y) \,|\, y \in (0,2)\} = (0,2).$$

Da questa e da (3) segue che $f(D) = (0,2)$.

- Grazie al punto precedente, se $z \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ si ha $E_z = \emptyset$. Se invece $z \in (0,2)$, si ha $E_z = \{(x,y) \in D \,|\, f(x,y) > z\}$. Osserviamo che la disequazione $f(x,y) > z$, con $(x,y) \in D$, equivale a

$$1 - [x^2 + (y-1)^2] > zy$$

ossia

$$x^2 + y^2 + zy - 2y < 0$$

cioè

$$x^2 + \left(y - \frac{2-z}{2}\right)^2 < \left(\frac{2-z}{2}\right)^2.$$

Quindi, se $z \in (0,2)$, la sezione E_z è il disco di raggio $\frac{2-z}{2}$ centrato nel punto $(0, \frac{2-z}{2})$.

- Indicato con N il campo normale a ∂E uscente da E (definito nelle parti interne dei tratti regolari di ∂E), si ha

$$\Phi = \int_{(\partial E, N)} (xz^2, y^2, -2yz) = \int_{\partial E} (xz^2, y^2, -2yz) \cdot N(x,y,z)\, dH^2.$$

Dal teorema della divergenza, otteniamo prima di tutto

$$\Phi = \int_E \mathrm{div}((xz^2, y^2, -2yz)) dL^3 = \int_E z^2\, dL^3$$

e quindi, usando il teorema di Fubini per sezioni piane orizzontali, troviamo

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^2 \left(\int_{E_z} z^2\, dL^2 \right) dz = \int_0^2 z^2 \left(\int_{E_z} 1\, dL^2 \right) dz \\ &= \int_0^2 z^2 L^2(E_z)\, dz = \frac{\pi}{4} \int_0^2 z^2\, (2-z)^2\, dz = \frac{4\pi}{15}.\end{aligned}$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, dispari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ x & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

- Tracciare il grafico di f.
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, limitarsi a dare un esempio di insieme nel quale si verifica tale tipo di convergenza.
- Calcolare a_n (per ogni $n \geq 0$) e b_7.

Risoluzione. Osserviamo prima di tutto che, essendo f dispari, si ha

$$f(-x) = -f(x), \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare:

- Per $x = 0$, si trova $f(0) = -f(0)$, i.e., $2f(0) = 0$, i.e.,

$$f(0) = 0. \tag{4}$$

- Se $x = -\pi$, ricordando anche che f è 2π-periodica, si ottiene $f(\pi) = -f(-\pi) = -f(\pi)$, i.e., $2f(\pi) = 0$, i.e.,

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0. \tag{5}$$

Ora, usando (4) e (5), è facile tracciare il grafico di f.

Segue una descrizione delle proprietà di convergenza della serie di F. di f:

- Si vede facilmente che la funzione f è misurabile (essa è combinazione lineare numerabile di funzioni caratteristiche di intervalli aperti e semiaperti, con coefficienti polinomiali) e limitata. In particolare f è di classe L^2. Quindi (per quanto stabilito dalla teoria L^2 della serie di F.) la serie di F. di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ e inoltre converge puntualmente q.o. a f (teorema di Lusin-Carleson).
- f è regolare a tratti, con $D = E = \{-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2\}$. Quindi la serie di F. di f valutata in x converge a:
  - (i) $f(x)$ per ogni $x \neq k\pi/2$ (con $k \in \mathbf{Z}$);
  - (ii) $f(x) = 0$, se $x = k\pi$ (con $k \in \mathbf{Z}$);
  - (iii) $-\pi/4$, se $x = -\pi/2 + k2\pi$ (con $k \in \mathbf{Z}$);
  - (iv) $\pi/4$, se $x = \pi/2 + k2\pi$ (con $k \in \mathbf{Z}$).
- La serie di F. di f converge uniformemente a f, per esempio, nell'intervallo $[\pi/8, 3\pi/8]$.

Procediamo infine al calcolo dei coefficienti richiesti. Poiché f è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre

$$b_7 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(7t)\, dt.$$

Usando la formula di integrazione per parti e il teorema fondamentale del calcolo, si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t) \sin(7t)\, dt &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin(7t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} t \sin(7t)\, dt \\
&= \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{\cos(7t)}{7}\right]_{\pi/2}^{0} - \frac{1}{7} \int_0^{\pi/2} \cos(7t)\, dt \\
&+ \left[t\, \frac{\cos(7t)}{7}\right]_{\pi}^{\pi/2} + \frac{1}{7} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(7t)\, dt \\
&= \frac{\pi}{14} - \frac{1}{49} [\sin(7t)]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{7} + \frac{1}{49} [\sin(7t)]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{3\pi}{14} + \frac{2}{49}
\end{aligned}$$

e quindi

$$b_7 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{3\pi}{14} + \frac{2}{49}\right) = \frac{3}{7} + \frac{4}{49\pi}.$$