**Prova scritta di**

**ANALISI MATEMATICA B**
**per il Corso di Laurea in Matematica**
**AA 2022/2023**

24 luglio 2023 - II appello

$* * *$

**Risoluzione degli esercizi**

**1.** Si rappresenti graficamente l'immagine $\Gamma$ di

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := ((t-1) \vee 0, t \wedge 1, t).$$

Si provi che $\Gamma$ è una curva regolare a tratti e si calcoli l'integrale

$$\int_\Gamma (x+y+z)\, d\mathcal{H}^1.$$

**Risoluzione.** Sia $\alpha := \gamma|_{[0,1]}$, i.e.,

$$\alpha(t) = \gamma(t) = (0, t, t), \text{ per ogni } t \in [0,1]$$

e $\beta := \gamma|_{[1,2]}$, i.e.,

$$\beta(t) = \gamma(t) = (t-1, 1, t), \text{ per ogni } t \in [1,2].$$

Allora:

- $\alpha$ è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare del segmento congiungente i punti $\alpha(0) = (0,0,0)$ e $\alpha(1) = (0,1,1)$. Indichiamo tale segmento con $\Gamma_1$.
- $\beta$ è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare del segmento congiungente i punti $\beta(1) = (0,1,1)$ e $\beta(2) = (1,1,2)$. Indichiamo tale segmento con $\Gamma_2$.

Ne segue che $\Gamma$ è una curva regolare a tratti e $\Gamma_1, \Gamma_2$ sono tratti regolari di $\Gamma$. Inoltre, osservando che

- $\alpha'(t) = (0,1,1)$ e quindi $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}$, per ogni $t \in (0,1)$,
- $\beta'(t) = (1,0,1)$ e quindi $|\beta'(t)| = \sqrt{2}$, per ogni $t \in (1,2)$,

troviamo (usando la formula dell'area)

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x+y+z)\, d\mathcal{H}^1 &= \int_{\Gamma_1=\alpha([0,1])} (x+y+z)\, d\mathcal{H}^1 + \int_{\Gamma_2=\beta([1,2])} (x+y+z)\, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_0^1 (0+t+t)\sqrt{2}\, dt + \int_1^2 (t-1+1+t)\sqrt{2}\, dt \\
&= \int_0^2 2t\sqrt{2}\, dt \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

**2.** Si tracci un grafico qualitativo della regione

$$R := \left\{ (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \right\}$$

e si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di $\{0\} \times R \subset \mathbb{R}^3$ intorno all'asse $z$.

**Risoluzione.** Osserviamo che il tratto regolare curvilineo di $\partial R$ è parametrizzato da

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)), \quad \theta \in [\pi/6, \pi/2]$$

con

$$x(\theta) := \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \cos\theta, \quad y(\theta) := \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \sin\theta.$$

Da queste otteniamo subito che

$$\gamma(\pi/6) = (0,0), \quad \gamma(\pi/2) = (0, (\pi/3)^{1/3}). \tag{1}$$

Inoltre la pendenza di tale tratto in un intorno di $\gamma(\pi/6)$ e in un intorno di $\gamma(\pi/2)$ è ovviamente data da

$$\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta + 3\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos\theta}{\cos\theta - 3\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\theta}.$$

Allora

$$\lim_{\theta \to \pi/6+} \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = -\frac{1}{\pi}. \tag{2}$$

Ora, usando (1) e (2), è facile fare un buon grafico qualitativo di $R$.

Indichiamo con $E$ il solido di rotazione. Possiamo usare la seguente $(3,3)$-parametrizzazione regolare (cambiamento di coordinate da cartesiane a sferiche) di $E$:

$$\Phi : C \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\rho, \theta, \psi) := (\rho\cos\theta\cos\psi, \rho\cos\theta\sin\psi, \rho\sin\theta)$$

dove

$$C := \{(\rho, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \theta \in [\pi/6, \pi/2],\ \psi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, (\theta - \pi/6)^{1/3}]\}.$$

Si ha

$$J\Phi(\rho, \theta, \psi) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\rho\sin\theta\cos\psi & -\rho\cos\theta\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & -\rho\sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \right| = \rho^2\cos\theta.$$

Quindi, dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned}
L^3(E) &= \int_{E=\Phi(C)} 1\,dL^3 = \int_C J\Phi\,dL^3 = \int_C \rho^2\cos\theta\,dL^3 \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_0^{(\theta-\pi/6)^{1/3}} \rho^2\cos\theta\,d\rho\right)d\theta\right)d\psi \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\rho^3)_0^{(\theta-\pi/6)^{1/3}}\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\theta-\pi/6)\cos\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

La conclusione segue facilmente dalla formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
L^3(E) &= \frac{2\pi}{3}\left([(\theta-\pi/6)\sin\theta]_{\pi/6}^{\pi/2} - \int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{2\pi^2}{9}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}.
\end{aligned}$$

**3.** Per ogni intero positivo $n$ definiamo la funzione

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sin(\pi x^{1/n}).$$

Si tracci il grafico di $f_n$ e si descrivano le proprietà di convergenza della successione $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

**Risoluzione.**

- (Grafico di $f_n$) Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, la funzione $f_n$ è derivabile in $(0,1]$ e si ha
$$f_n'(x) = \frac{\pi}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \cos(\pi x^{1/n}) \qquad (x \in (0,1]).$$
Da questa uguaglianza vediamo subito che:
  - $f_n'$ si annulla in $2^{-n}$;
  - $f_n'|_{(0,2^{-n})} > 0$ e $f_n'|_{(2^{-n},1]} < 0$.

  Ne segue che $f_n$ è crescente in $(0, 2^{-n})$, è decrescente in $(2^{-n}, 1]$ e in $2^{-n}$ assume il suo valore massimo $f_n(2^{-n}) = 1$. Inoltre $f_n(0) = f_n(1) = 0$ e quindi $f_n \geq 0$. Conoscendo queste proprietà, ora possiamo tracciare facilmente un grafico qualitativo soddisfacente di $f_n$.

- (Convergenza puntuale) Si ha $f_n(0) = f_n(1) = 0$, per ogni $n$, per cui vale
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0.$$
Inoltre
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0, \text{ per ogni } x \in (0,1).$$
Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione $f := 0$ in $D := [0,1]$.

- (Convergenza uniforme I) Si ha
$$\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1]} f_n(x) = f_n(2^{-n}) = 1, \text{ per ogni } n,$$
e pertanto $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $(0,1]$. A maggior ragione $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $[0,1]$.

- (Convergenza uniforme II) Sia $a \in (0,1)$. Allora
$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[a,1]} f_n(x) = f_n(a)$$
per ogni $n$ tale che $2^{-n} \leq a$. Quindi
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$$
e cioè $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ in $[a,1]$.