Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2022/2023

1 settembre 2023 - III appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Calcolare

$$\int_E (x^2+y^2)e^{2z}\, dL^3,$$

dove

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq \min\{1, -\ln(x^2+y^2)\}\}.$$

Risoluzione. Osserviamo prima di tutto che $E_z = \emptyset$, per ogni $z \notin [0,1]$. Se invece $z \in [0,1]$, l'insieme E_z è il disco centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2_{xy}$ e avente raggio $e^{-z/2}$. Quindi, per il teorema di Fubini (sezioni piane orizzontali)

$$\begin{aligned}\int_E (x^2+y^2)e^{2z}\, dL^3 &= \int_0^1 \left(\int_{E_z} (x^2+y^2)e^{2z}\, dL^2(x,y)\right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_{E_z} (x^2+y^2) dL^2(x,y)\right) e^{2z}\, dz.\end{aligned} \tag{1}$$

Dalla formula dell'area (cambio di coordinate cartesiane-polari) e nuovamente dal teorema di Fubini, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{E_z} (x^2+y^2)\, dL^2(x,y) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{e^{-z/2}} \rho^3 d\rho\right) d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^{e^{-z/2}} = \frac{\pi e^{-2z}}{2}\end{aligned} \tag{2}$$

per ogni $z \in [0,1]$. Ora, da (1) e (2), segue che

$$\int_E (x^2+y^2)e^{2z}\, dL^3 = \int_0^1 \frac{\pi e^{-2z}}{2} \cdot e^{2z}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

2. Sia D la regione limitata del piano yz racchiusa dalle curve

$$z = \ln y, \quad z = 0, \quad y = e.$$

Sia E il solido ottenuto da una rotazione completa di D intorno all'asse z e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x, y, -z).$$

- Rappresentare graficamente D;
- Provare che $L^3(E) = \int_E \operatorname{div} F \, dL^3$;
- Usare il punto precedente e il teorema della divergenza per calcolare esplicitamente $L^3(E)$.

Risoluzione. Si ha $\operatorname{div} F = 1 + 1 - 1 = 1$ e quindi

$$\int_E \operatorname{div} F \, dL^3 = \int_E 1 \, dL^3 = L^3(E).$$

Dal teorema della divergenza otteniamo ora

$$L^3(E) = \int_E \operatorname{div} F \, dL^3 = \int_{\partial E} F \cdot N \, dH^2, \tag{3}$$

dove N indica il campo normale esterno a ∂E. Osserviamo che ∂E è una superficie regolare a tratti, avente come tratti regolari:

- La superficie L ottenula da una una rotazione completa della curva $\{(0, y, \ln y) \mid 1 \leq y \leq e\}$ intorno all'asse z;
- la corona circolare Γ nel piano xy, centrata nell'origine e avente raggi 1 ed e;
- La superficie cilindrica $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = e^2, \, z \in [0, 1]\}$.

Una parametrizzazione di L è data da

$$\varphi : R := [1, e] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \ln \rho).$$

Si calcola facilmente che si ha (per ogni $(\rho, \theta) \in (1, e) \times (0, 2\pi)$)

$$D_1\varphi(\rho, \theta) \times D_2\varphi(\rho, \theta) = (-\cos \theta, -\sin \theta, \rho)$$

e quindi

$$J\varphi(\rho, \theta) = \|D_1\varphi(\rho, \theta) \times D_2\varphi(\rho, \theta)\| = (1 + \rho^2)^{1/2}.$$

Usando la formula dell'area e il teorema di Fubini, possiamo ora calcolare la parte del flusso di F uscente da ∂E relativa al tratto L

$$\begin{aligned}
\int_{L=\varphi(R)} F \cdot N \, dH^2 &= \int_R F(\varphi(\rho,\theta)) \cdot \underbrace{N(\varphi(\rho,\theta)) J\varphi(\rho,\theta)}_{=D_1\varphi(\rho,\theta)\times D_2\varphi(\rho,\theta)} \, dL^2 \\
&= \int_R (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, -\ln\rho) \cdot (-\cos\theta, -\sin\theta, \rho) \, dL^2(\rho,\theta) \\
&= -\int_R (\rho + \rho\ln\rho) \, dL^2(\rho,\theta) \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\int_1^e (\rho + \rho\ln\rho) \, d\rho \right) d\theta \\
&= -2\pi \int_1^e (\rho + \rho\ln\rho) \, d\rho
\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_L F \cdot N \, dH^2 = \frac{(1-3e^2)\pi}{2}. \tag{4}$$

Inoltre

$$\int_\Gamma F \cdot N \, dH^2 = \int_\Gamma (x,y,0) \cdot (0,0,-1) \, dH^2 = 0 \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot N \, dH^2 &= \int_C (x,y,-z) \cdot (x/e, y/e, 0) \, dH^2 \\
&= \frac{1}{e} \int_C \underbrace{(x^2+y^2)}_{=e^2} \, dH^2 = eH^2(C) \\
&= 2\pi e^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Da (3), (4), (5) e (6) otteniamo finalmente

$$\begin{aligned}
L^3(E) &= \int_L F \cdot N \, dH^2 + \int_\Gamma F \cdot N \, dH^2 + \int_C F \cdot N \, dH^2 \\
&= \frac{(1-3e^2)\pi}{2} + 2\pi e^2 = \frac{(1+e^2)\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Descrivere le proprietà di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{n/2}}{n}.$$

Risoluzione. La serie assegnata è una "serie di potenze mascherata" e più precisamente essa si ottiene sostituendo $y = |x|^{1/2}$ nella serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}. \tag{7}$$

Osserviamo che (7) ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza puntuale $[-1, 1)$.

- (Convergenza puntuale) Indicato con D l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata, si ha pertanto

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq |x|^{1/2} < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x|^{1/2} < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} = (-1, 1). \end{aligned}$$

- (Convergenza totale, convergenza uniforme) Ricordiamo che la serie di potenze (7) converge totalmente in $(C([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r \in (0, 1)$. Inoltre si ha (per ogni $r > 0$ e $n \geq 1$)

$$\max_{y\in[-r,r]} \left|\frac{y^n}{n}\right| = \max_{y\in[-r,r]} \frac{|y|^n}{n} = \frac{r^n}{n} = \frac{(r^2)^{n/2}}{n} = \max_{x\in[-r^2,r^2]} \frac{|x|^{n/2}}{n}.$$

  Quindi anche la serie assegnata converge totalmente in $(C([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$, per ogni $r \in (0, 1)$. Questo implica la convergenza semplice in $(C([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$ e quindi anche la convergenza uniforme in $[-r, r]$, per ogni $r \in (0, 1)$.